บทความวิจัย

การสั่นอิสระแบบสมมาตรและแบบปฏิสมมาตรตามแนวแกนของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายใน

คมกร ไชยเดชาธร* และ วีรพันธุ์ เจียมมีปรีชา
สาขาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน นครราชสีมา
สิทธิศักดิ์ แจ่มนาม
ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

* ผู้นิพนธ์ประสานงาน โทรศัพท์ 08 8592 9040 อีเมล: komkorn@rmuti.ac.th DOI: 10.14416/j.kmutnb.2021.05.026
รับเมื่อ 19 ตุลาคม 2563 แก้ไขเมื่อ 16 พฤศจิกายน 2563 ตอบรับเมื่อ 23 พฤศจิกายน 2563 เผยแพร่ออนไลน์ 25 พฤษภาคม 2564

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการวิเคราะห์การสั่นอิสระแบบสมมาตรและแบบปฏิสมมาตรตามแนวแกนของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายใน รูปทรงเรขาคณิตของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายในจะสามารถคำนวณได้จากหลักการของเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ การสร้างฟังก์ชันพลังงานของระบบโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายในจะอาศัยหลักการของงานเสมือนในเทอมของค่าการเสียรูปและใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการคำนวณหาค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดการสั่นอิสระแบบสมมาตรและแบบปฏิสมมาตรตามแนวแกน ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขที่แสดงค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดการสั่นอิสระแบบสมมาตรและแบบปฏิสมมาตรตามแนวแกนของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายในที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงผลของความหนาและแรงดันภายในภายใต้ค่าพารามิเตอร์ของความเค้นคงที่ ความยาวรัศมีของหน้าตัด แรงดันภายใน และมอดุลัสยืดหยุ่นของโครงสร้างได้นำเสนอในบทความนี้ จากผลการศึกษาพบว่า โหมดการสั่นของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายในจะประกอบไปด้วยโหมดการสั่นแบบสมมาตรตามแนวแกนและแบบปฏิสมมาตร

คำสำคัญ: การสั่นอิสระแบบสมมาตรตามแนวแกน การสั่นอิสระแบบแบบปฏิสมมาตรตามแนวแกน โครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายใน เรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ ความถี่ธรรมชาติ

การอ้างอิงบทความ: คมกร ไชยเดชาธร, วีรพันธุ์ เจียมมีปรีชา และ สิทธิศักดิ์ แจ่มนาม, "การสั่นอิสระแบบสมมาตรและแบบปฏิสมมาตรตามแนวแกนของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายใน," *วารสารวิชาการพระจอมเกล้าพระนครเหนือ*, ปีที่ 31, ฉบับที่ 4, หน้า 661–674, ต.ค.–ธ.ค. 2564.

Research Article

Axisymmetric and Antisymmetric Free Vibrations of Inflated Toroidal Membrane

Komkorn Chaidachatorn* and Weeraphan Jiammeepreecha
Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering and Architecture, Rajamangala University of Technology Isan, Nakhon Ratchasima, Thailand
Sittisak Jamnam
Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, King Mongkut's University of Technology North Bangkok, Bangkok, Thailand

*Corresponding Author, Tel. 08 8592 9040, E-mail: komkorn@rmuti.ac.th
DOI: 10.14416/j.kmutnb.2021.05.026
Received 19 October 2020; Revised 16 November 2020; Accepted 23 November 2020; Published online: 25 May 2021

Abstract

This paper presents the axisymmetric and antisymmetric free vibrations analysis of inflated toroidal membrane. The geometry of the inflated toroidal membrane can be computed from differential geometry. The energy functional of inflated toroidal membrane is written in terms of displacements from the principle of virtual work. Natural frequencies and corresponding axisymmetric and antisymmetric mode shapes can be obtained by finite element method. The effects of thickness and internal pressure under constant prestress parameter, cross-sectional radius, internal pressure, and elastic modulus on the axisymmetric and antisymmetric free vibrations of the inflated toroidal membrane are presented in this paper. The results indicate that the mode of the vibration of the inflated toroidal membrane consists of axisymmetric and antisymmetric mode shapes.

Keywords: Axisymmetric Free Vibration, Antisymmetric Free Vibration, Inflated Toroidal Membrane, Differential Geometry, Natural Frequency

Please cite this article as: K. Chaidachatorn, W. Jiammeepreecha, and S. Jamnam, "Axisymmetric and antisymmetric free vibrations of inflated toroidal membrane," *The Journal of KMUTNB*, vol. 31, no. 4, pp. 661–674, Oct.–Dec. 2021 (in Thai).

1. บทนำ

โครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายในเป็นโครงสร้างที่มีความสำคัญต่ออุตสาหกรรมหลากหลายแขนงโดยเฉพาะอย่างยิ่งในภาคอุตสาหกรรมปิโตรเคมี เช่น ถังบรรจุปิโตรเลียมเหลว หรือท่อยืดลมร้อน [1]–[4] เนื่องจากโครงสร้างประเภทดังกล่าวจะเป็นโครงสร้างที่สามารถรับแรงดันภายในได้สูง ซึ่งแรงดันภายในจะทำให้โครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางมีเสถียรภาพสามารถนำไปใช้งานได้อย่างปลอดภัย เช่น ยางรถยนต์หรือเครื่องบินได้ อย่างไรก็ตาม ในการออกแบบโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายในนั้นจำเป็นจะต้องพิจารณาถึงพฤติกรรมทางด้านพลศาสตร์ เนื่องจากการใช้งานโครงสร้างดังกล่าวอาจจะเกิดแรงกระทำแบบพลศาสตร์ที่มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลา เช่น การสั่นสะเทือนที่เกิดจากการทำงานของเครื่องจักรในโรงงานอุตสาหกรรมปิโตรเคมี ดังนั้นค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดการสั่นของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายในจึงเป็นค่าที่มีความสำคัญอย่างยิ่งในการนำมาพิจารณาในขั้นตอนของการออกแบบโครงสร้างดังกล่าว เพื่อป้องกันความเสียหายเนื่องจากการสั่นพ้องจนทำให้โครงสร้างเกิดความเสียหายจนไม่สามารถนำไปใช้งานต่อได้

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสั่นอิสระของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห่วงยางในกรณีที่ปราศจากแรงดันภายในได้เริ่มต้นจากงานวิจัยของ Leung และ Kwok [5], Ming และคณะ [6], Wang และ Redekop [7] และ Kang [8] ในขณะที่การวิเคราะห์การสั่นอิสระของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายในได้เริ่มต้นมาจากงานวิจัยของ Federhofer [9] ซึ่งได้ทำการศึกษาพฤติกรรมการสั่นแบบสมมาตรตามแนวแกนของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายในโดยมีสมมติฐานว่าความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดทรงห่วงยางมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับความยาวรัศมีจากแกนหมุนถึงจุดศูนย์กลางของรูปหน้าตัดทรงห่วงยาง จากนั้น Liepins [10] ได้เสนอการวิเคราะห์การสั่นอิสระของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายในโดยใช้วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนต์ ต่อมาได้เพิ่มเทอมของค่าความแข็งแกร่งเนื่องจากผลของการดัดในสมการควบคุม (Governing Equation) ในงานวิจัยของ Liepins [11] หลังจากนั้น Fang [12] ได้สร้างสมการสำหรับการวิเคราะห์การสั่นอิสระของโครงสร้างเปลือกบางสำหรับบรรจุของเหลวชนิดบีบอัดตัวไม่ได้โดยอาศัยหลักการทฤษฎีเชลล์ของ Love โดยเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติ และโหมดการสั่นกับกรณีของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห่วงยางที่ไม่ได้บรรจุของเหลวในงานวิจัยของ Kosawada และคณะ [13] ต่อมา Jha และคณะ [14] ได้ประยุกต์ใช้ทฤษฎีเชลล์ของ Sander ในการหาค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดการสั่นของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายในและใช้วิธีของกาเลอร์คิน (Galerkin's Method) ในการหาคำตอบโดยการเปรียบเทียบกับงานวิจัยของ Liepins [10]

จากงานวิจัยที่ผ่านมาในอดีตจะพบว่า การศึกษาพฤติกรรมการสั่นอิสระของโครงสร้างเปลือกบางรูปทรงห่วงยางจะมุ่งเน้นในกรณีที่ใช้หลักการของทฤษฎีเชลล์ (Shell Theory) ซึ่งทฤษฎีดังกล่าวจะรวมผลของพลังงานความเครียดจากแรงดัดและแรงดึง ในขณะที่โครงสร้างเปลือกบางที่มีค่าความหนาของโครงสร้างน้อยมากเมื่อเทียบกับความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดทรงห่วงยางของโครงสร้างเปลือกบางจะมีค่าพลังงานความเครียดจากแรงดัดน้อยมาก ดังนั้นจึงสามารถใช้ทฤษฎีเมมเบรน (Membrane Theory) แทนได้ โดยจะคิดเฉพาะเทอมของพลังงานความเครียดจากแรงดึงเท่านั้น โดยที่โครงสร้างดังกล่าวนี้จะเรียกว่าโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัด ซึ่งการวิเคราะห์การสั่นอิสระของโครงสร้างเปลือกบางโดยใช้ทฤษฎีเมมเบรนจะสามารถพบได้จากงานวิจัยของ Liepins [10], วีรพันธุ์ [15], [16], วีรพันธุ์ และสมชาย [17], [18] ดังนั้นวัตถุประสงค์ของงานวิจัยในครั้งนี้คือ เพื่อศึกษาพฤติกรรมการสั่นอิสระของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายในโดยปราศจากเงื่อนไขขอบเขต (Free Boundary Condition) ซึ่งจะเป็นการพัฒนาจากงานวิจัยของคมกรและคณะ [19] ที่ทำการศึกษาเกี่ยวกับพฤติกรรมการสั่นอิสระของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัด

แบบครึ่งใบรูปทรงห่วงยาง การคำนวณหารูปทรงเรขาคณิตของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายในจะอาศัยหลักการของเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ [20] การเขียนฟังก์ชันพลังงานของระบบโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายในจะอาศัยหลักการของงานเสมือน [21] ในเทอมของค่าการเสียรูปและใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [22] ในการคำนวณหาค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดการสั่น

2. วัสดุ อุปกร์และวิธีการวิจัย

วิธีการวิจัยในบทความนี้จะประกอบไปด้วยสมมติฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์ แบบจำลองโครงสร้าง ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการเสียรูป พลังงานความเครียดของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัด พลังงานศักย์ของแรงดันภายใน งานเสมือนเนื่องจากแรงเฉื่อย ผลรวมของงานเสมือน และสุดท้ายจะเป็นการแก้ปัญหาเชิงตัวเลขโดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ดังต่อไปนี้

2.1 สมมติฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์

2.1.1 โครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายในจะมีหน้าตัดเป็นรูปวงกลมที่มีความยาวรัศมีคงที่

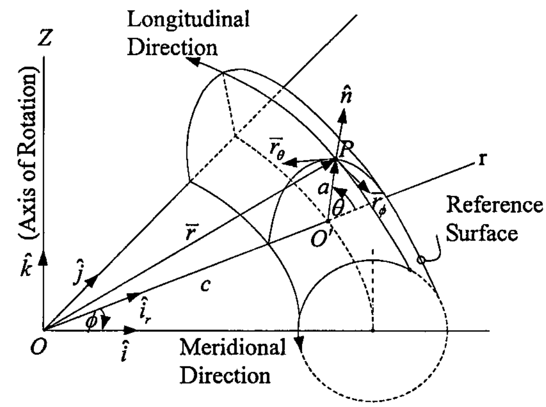
2.1.2 ความหนาของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดจะมีค่าคงที่โดยไม่มีการเปลี่ยนแปลงทั้งก่อนและหลังการสั่น

2.1.3 แรงดันภายในมีค่าคงที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงขณะเกิดการสั่นของโครงสร้าง

2.1.4 วัสดุของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดมีสมบัติยืดหยุ่นแบบเชิงเส้น (Linearly Elastic Material)

2.2 แบบจำลองโครงสร้าง

โครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายในจะมีรูปทรงเรขาคณิตดังแสดงในรูปที่ 1 โดยกำหนดให้ (X, Y, Z) เป็นระบบพิกัดฉาก (Rectangular Coordinate) และ $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทาง



รูปที่ 1 รูปทรงเรขาคณิตที่สภาวะอ้างอิง

ตามแนวแกนในระบบพิกัดฉาก ซึ่งจะสามารถนิยามได้จากสมการที่ (1)–(3)

$$X(\theta,\phi) = (c + a\cos\theta)\cos\phi \tag{1}$$

$$Y(\theta,\phi) = (c + a\cos\theta)\sin\phi \tag{2}$$

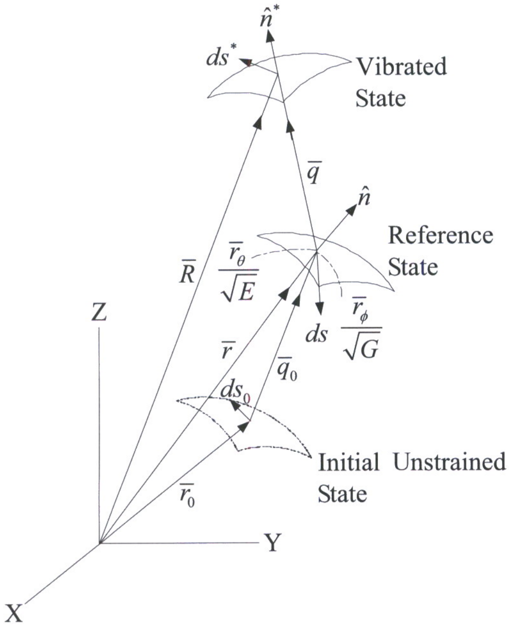
$$Z(\theta,\phi) = a\sin\theta \tag{3}$$

เมื่อ a คือ ความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดทรงห่วงยาง c คือ ความยาวรัศมีจากแกนหมุนถึงจุดศูนย์กลางของรูปหน้าตัดทรงห่วงยาง และ (θ, ϕ) คือ ค่าพารามิเตอร์ของพื้นผิวที่วัดตามแนวเส้นพิกัดเมอร์ริเดียนและลองจิจูด ตามลำดับ ดังนั้นเวกเตอร์ระบุตำแหน่งบนพื้นผิวอ้างอิงที่จุด P ซึ่งจะสามารถนิยามได้ด้วยสมการที่ (4)

$$\bar{r}(\theta,\phi) = r\cos\phi\,\hat{i} + r\sin\phi\,\hat{j} + Z\,\hat{k} \tag{4}$$

จากรูปที่ 2 จะเห็นได้ว่าเมื่อโครงสร้างเกิดการเสียรูปจะทำให้พื้นผิวอ้างอิงที่สภาวะอ้างอิงเคลื่อนที่ไปยังตำแหน่งใหม่ที่เวลา t ใดๆ ดังนั้นเวกเตอร์ระบุตำแหน่งบนพื้นผิวหลังการสั่นที่ตำแหน่งเดียวกันจะนิยามได้ด้วยสมการที่ (5)

$$\bar{R}(\theta,\phi,t) = \bar{r}(\theta,\phi) + \bar{q}(\theta,\phi,t) \tag{5}$$



รูปที่ 2 เวกเตอร์ระบุตำแหน่ง

เมื่อ $\bar{q}(\theta,\phi,t)$ คือ เวกเตอร์การเคลื่อนที่ (Displacement Vector) สามารถนิยามได้ดังสมการที่ (6)

$$\bar{q}(\theta,\phi,t)=\frac{\bar{r}_\theta}{\sqrt{E}}u+\frac{\bar{r}_\phi}{\sqrt{G}}v+\hat{n}w \tag{6}$$

เมื่อ u, v และ w คือ ค่าการเสียรูปตามแนวเส้นเมอร์ริเดียน แนวเส้นลองจิจูด และแนวตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียน ตามลำดับ แต่เนื่องจากเป็นปัญหาของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดที่มีความสมมาตร โดยที่ตัวห้อย (θ, ϕ) คือ การอนุพันธ์ย่อยตามแนวระบบพิกัดของโครงสร้างนั่นคือ $\bar{r}_\theta = d\bar{r}/d\theta$ และ $\bar{r}_\phi = d\bar{r}/d\phi$ ตามลำดับ ดังนั้นเทอมของ $(\bar{r}_\phi/\sqrt{G})v$ ในสมการที่ (6) จะมีค่าเป็นศูนย์ สำหรับค่าความเร็วและความเร่งของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดจะสามารถหาได้โดยการอนุพันธ์สมการที่ (6) เทียบกับเวลาจะได้สมการที่ (7) และ (8)

$$\bar{V}=\dot{\bar{R}}(\phi,\theta,t)=\frac{\bar{r}_\theta}{\sqrt{E}}\dot{u}+\hat{n}\dot{w} \tag{7}$$

$$\bar{a}=\ddot{\bar{R}}(\phi,\theta,t)=\frac{\bar{r}_\theta}{\sqrt{E}}\ddot{u}+\hat{n}\ddot{w} \tag{8}$$

ในที่นี้ $(\dot{\ })$ คือการอนุพันธ์ย่อยเทียบกับเวลา t จากหลักการของเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ (Differential Geometry) [20] จะได้รูปแบบของพื้นฐานอันดับหนึ่ง (First Fundamental Form) ของพื้นผิวที่สภาวะอ้างอิง (Reference State) และพื้นผิวที่สภาวะการสั่น (Vibrated State) ซึ่งสามารถนิยามได้ในเทอมของความยาวของชิ้นส่วน ds และ ds^* ตามลำดับ ดังแสดงในสมการที่ (9)–(10)

$$ds^2 = d\bar{r}\cdot d\bar{r} = Ed\theta^2 + 2Fd\theta d\phi + Gd\phi^2 \tag{9}$$

$$ds^{*2} = d\bar{R}\cdot d\bar{R} = E^* d\theta^2 + 2F^* d\theta d\phi + G^* d\phi^2 \tag{10}$$

เมื่อ $E=\bar{r}_\theta\cdot\bar{r}_\theta$, $F=\bar{r}_\theta\cdot\bar{r}_\phi$ และ $G=\bar{r}_\phi\cdot\bar{r}_\phi$ คือเมตริกเทนเซอร์ (Metric Tensor) ที่พื้นผิวที่สภาวะอ้างอิง ถ้ากำหนดให้ $\hat{n}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวตั้งฉากกับพื้นผิวอ้างอิงจะสามารถหาได้ดังสมการที่ (11)

$$\hat{n}=\frac{\bar{r}_\theta\times\bar{r}_\phi}{\left|\bar{r}_\theta\times\bar{r}_\phi\right|}=\frac{rZ_\theta\cos\phi\,\hat{i}+rZ_\theta\sin\phi\,\hat{j}-rr_\theta\,\hat{k}}{D} \tag{11}$$

เมื่อ $D=\sqrt{EG-F^2}$ และเนื่องจาก $d\hat{n}=\hat{n}_\theta d\theta+\hat{n}_\phi d\phi$ ซึ่งจะทำให้ได้รูปแบบของพื้นฐานอันดับสอง (Second Fundamental Form) ของพื้นผิวอ้างอิงดังสมการที่ (12)

$$-d\bar{r}\cdot d\hat{n} = ed\theta^2 + 2fd\theta d\phi + gd\phi^2 \tag{12}$$

เมื่อ $e=\bar{r}_{\theta\theta}\cdot\hat{n}$, $f=\bar{r}_{\theta\phi}\cdot\hat{n}$ และ $g=\bar{r}_{\phi\phi}\cdot\hat{n}$ คือเมตริกความโค้ง (Metric Curvature) ที่พื้นผิวที่สภาวะอ้างอิง

2.3 ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการเสียรูป

ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการเสียรูปจะสามารถนิยามความเครียดแบบโททอลลากรองจ์ (Total Lagrangian Strains) ดังสมการที่ (13)

$$\left\{\varepsilon^L\right\}=\left[T\right]\left(\left\{\varepsilon_0\right\}+\left\{\varepsilon\right\}\right) \tag{13}$$

โดยที่ ε_0 และ ε คือ ค่าความเครียดเริ่มต้นแบบออยเลอร์

(Initial Eulerian Strains) และค่าความเครียดส่วนเพิ่ม (Added Strains) ตามลำดับ สามารถนิยามได้ดังสมการที่ (14)–(17)

$$\varepsilon_{0\theta}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{E_0}{E}\right) \quad (14)$$

$$\varepsilon_{0\phi}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{G_0}{G}\right) \quad (15)$$

$$\varepsilon_{\theta}=\frac{1}{2}\left(\frac{E^*}{E}-1\right) \quad (16)$$

$$\varepsilon_{\phi}=\frac{1}{2}\left(\frac{G^*}{G}-1\right) \quad (17)$$

และ [T] คือ เมตริกในแนวทแยงระหว่างชิ้นส่วนกับวัสดุ (Diagonal Material-Element Matrix) ซึ่งสามารถเขียนได้ดังสมการที่ (18)

$$[T]=\begin{bmatrix}\frac{1}{1-2\varepsilon_{0\theta}} & 0\\ 0 & \frac{1}{1-2\varepsilon_{0\phi}}\end{bmatrix} \quad (18)$$

2.4 พลังงานความเครียดของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัด

พลังงานความเครียดของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดที่มีคุณสมบัติยืดหยุ่นแบบเชิงเส้นทั่วไป สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (19)

$$U=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left\{\varepsilon^L\right\}^T\left[C'\right]\left\{\varepsilon^L\right\}hD_0\,d\phi d\theta \quad (19)$$

เมื่อ h คือ ความหนาของโครงสร้าง และ $[C']$ คือ เมตริกสมบัติของวัสดุโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัด ซึ่งสามารถเขียนได้ดังสมการที่ (20)

$$[C']=\frac{E'}{1-\mu^2}\begin{bmatrix}1 & \mu\\ \mu & 1\end{bmatrix} \quad (20)$$

เมื่อ E' คือ มอดุลัสยืดหยุ่น, μ คือ อัตราส่วนปัวซง และ D_0 สามารถนิยามได้ดังสมการที่ (21)

$$D_0=D\sqrt{\left(1-2\varepsilon_{0\theta}\right)\left(1-2\varepsilon_{0\phi}\right)} \quad (21)$$

ดังนั้นเมื่อแทนค่าสมการที่ (13), (20) และ (21) ลงในสมการที่ (19) จะได้ดังสมการที่ (22)

$$U=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{2}\left(\left\{\varepsilon_0\right\}^T+\left\{\varepsilon\right\}^T\right)\left[C\right]\left(\left\{\varepsilon_0\right\}+\left\{\varepsilon\right\}\right)d\theta \quad (22)$$

เมื่อ [C] คือ เมตริกสมบัติของวัสดุโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดที่อ้างอิงจากสภาวะเริ่มต้นปราศจากความเครียด (Initial Unstrained State) สามารถนิยามได้ดังสมการที่ (23)

$$[C]=2\pi[T]^T[C'][T]\,hD_0 \quad (23)$$

จากสมการที่ (22) สามารถจัดรูปใหม่ ซึ่งจะทำให้ได้ค่าการแปรผันของพลังงานความเครียดของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดดังสมการที่ (24)

$$\delta U=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\delta\{g\}^T\left[\left\{\tilde{c}_0\right\}+\left[\tilde{k}\right]\{g\}\right]d\theta \quad (24)$$

เมื่อ $\{g\}$, $\{\tilde{c}_0\}$ และ $[\tilde{k}]$ สามารถนิยามได้จากสมการที่ (25)–(27)

$$\{g\}^T=\lfloor u \quad w \quad u_\theta \quad w_\theta\rfloor \quad (25)$$

$$\left\{\tilde{c}_0\right\}=\begin{Bmatrix}\lfloor L_1\rfloor\\ \lfloor L_2\rfloor\end{Bmatrix}^T[C]\begin{Bmatrix}\{\varepsilon_{0\theta}\}\\ \{\varepsilon_{0\phi}\}\end{Bmatrix} \quad (26)$$

$$\left[\tilde{k}\right]=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}C_{ij}\left[\{L_i\}\{L_j\}^T\right] \quad (27)$$

เมื่อ $\{L\}$ คือ ค่าของเวกเตอร์ของค่าความเครียดที่เพิ่มขึ้นในเทอมของเมตริกเทนเซอร์และเมตริกความโค้ง โดยที่กำหนดให้ $A=\sqrt{E}$ และ $B=\sqrt{G}$ ดังสมการที่ (28) – (29)

$$\{L_1\}^T=\left\lfloor 0 \quad -\frac{e}{E} \quad \frac{1}{A} \quad 0\right\rfloor \quad (28)$$

$$\{L_2\}^T=\left\lfloor \frac{B_\theta}{AB} \quad -\frac{g}{G} \quad 0 \quad 0\right\rfloor \quad (29)$$

2.5 พลังงานศักย์ของแรงดันภายใน

เนื่องจากแรงดันภายในที่กระทำต่อโครงสร้างเป็นแรงกระทำแบบติดตามการเสียรูป ซึ่งสามารถพิจารณาเป็นแรงแบบอนุรักษ์ (Conservative Force) ดังนั้นพลังงานศักย์ของแรงดันภายในสามารถคำนวณได้ดังสมการที่ (30)

$$\Omega = -\frac{p_0}{3}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_0^{2\pi}\left(\bar{\mathbf{V}}-\bar{\mathbf{v}}\right)d\phi d\theta \tag{30}$$

เมื่อ $\bar{\mathbf{v}}$ และ $\bar{\mathbf{V}}$ คือ ปริมาตรช่องว่างภายในของพื้นผิวโครงสร้างเปลือกบางที่สภาวะอ้างอิงและสภาวะการสั่นตามลำดับ นั่นคือ $\bar{\mathbf{v}} = \bar{r}_\theta \times \bar{r}_\phi \cdot \bar{r}$ และ $\bar{\mathbf{V}} = \bar{R}_\theta \times \bar{R}_\phi \cdot \bar{R}$ และ p_0 คือ แรงดันภายในคงที่ เมื่อแทนค่าจากสมการที่ (4) และ (5) ลงไปในสมการที่ (30) จะได้ค่าการแปรผันของพลังงานศักย์ของแรงดันภายในดังสมการที่ (31)

$$\delta\Omega = -\frac{p_0}{3}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\delta\{g\}^T\{\tilde{v}\}d\theta \tag{31}$$

เมื่อ $\lfloor \tilde{v} \rfloor = \lfloor \tilde{v}_1 \quad \tilde{v}_2 \quad \tilde{v}_3 \quad \tilde{v}_4 \rfloor$ คือ เวกเตอร์ของปริมาตรที่เปลี่ยนแปลง ซึ่งสามารถนิยามได้ดังสมการที่ (32) – (35)

$$\tilde{v}_1 = 2\pi\left(B_\theta(\bar{r}\cdot\hat{n}) - \frac{Be}{A^2}(\bar{r}\cdot\bar{r}_\theta)\right) \tag{32}$$

$$\tilde{v}_2 = 2\pi\left(-\frac{Ag}{B}(\bar{r}\cdot\hat{n}) - \frac{Be}{A}(\bar{r}\cdot\hat{n}) + AB\right) \tag{33}$$

$$\tilde{v}_3 = 2\pi\left(B(\bar{r}\cdot\hat{n})\right) \tag{34}$$

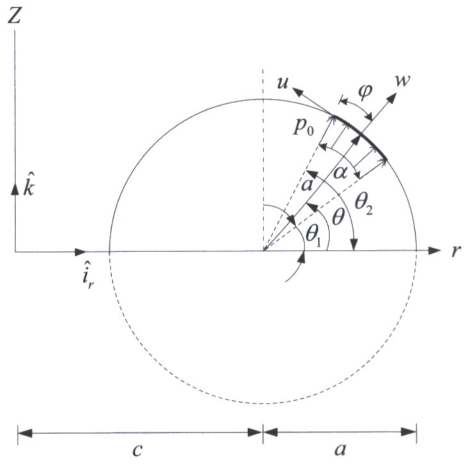
$$\tilde{v}_4 = 2\pi\left(-\frac{B}{A}(\bar{r}\cdot\bar{r}_\theta)\right) \tag{35}$$

2.6 งานเสมือนเนื่องจากแรงเฉื่อย

งานเสมือนเนื่องจากแรงเฉื่อยของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดจะคำนวณได้จากสมการที่ (36)

$$\delta I = -2\pi\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left(\ddot{u}\{\delta u\} + w\{\delta w\}\right)\rho_s h D\, d\theta \tag{36}$$

เมื่อ ρ_s คือ ความหนาแน่นของวัสดุโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัด และ $(\ddot{u}, \ddot{w})$ คือ องค์ประกอบสำหรับเวกเตอร์ความเร่งของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัด



รูปที่ 3 ชิ้นส่วนย่อยทั่วไปและระยะพิกัดของโครงสร้าง

2.7 ผลรวมของงานเสมือน

ผลรวมของงานเสมือน [21] ของระบบโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายในที่สภาวะสมดุล ($\delta\,\pi = 0$) จะคำนวณได้ดังสมการที่ (37)

$$\delta U + \delta\Omega - \delta I = 0 \tag{37}$$

แทนค่าจากสมการที่ (24), (31) และ (36) ลงในสมการที่ (37) จะได้ดังสมการที่ (38)

$$\begin{aligned}&\int_{\theta_1}^{\theta_2}\delta\{g\}^T\left[\{\tilde{c}_0\} + \left[\tilde{k}\right]\{g\}\right]d\theta \\ &\quad -\frac{p_0}{3}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\delta\{g\}^T\{\tilde{v}\}d\theta \\ &\quad +2\pi\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left(\ddot{u}\{\delta u\} + \rho_s\ddot{w}\{\delta w\}\right)\rho_s h D\, d\theta = 0\end{aligned} \tag{38}$$

2.8 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

จากผลรวมของงานเสมือนของระบบโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายในดังแสดงในสมการที่ (38) พบว่า ไม่สามารถคำนวนหาผลเฉลยแบบแม่นตรงได้เนื่องจากสมการดังกล่าวประกอบไปด้วยเทอมไร้มิติค่อนข้างสูงจำเป็นต้องแก้ปัญหาโดยใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [22] เพื่อหาคำตอบเชิงตัวเลขของค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดการสั่น โดยทำการแบ่งโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูป

ทรงห่วงยางออกเป็นชิ้นส่วนย่อยตามแนวพิกัด θ ดังแสดงในรูปที่ 3

เมื่อทำการพิจารณาชิ้นส่วนใดๆ จะได้ค่าการประมาณค่าการเสียรูปในแนวสัมผัสและแนวตั้งฉากกับเส้นเมอร์ริเดียน u และ w โดยใช้ฟังก์ชันโพลีโนเมียลอันดับสาม (Cubic Polynomial) ดังสมการที่ (39)

$$\{g\}=[\psi]\{d\} \tag{39}$$

เมื่อ $\{g\}$ คือ เวกเตอร์การเคลื่อนที่ที่จุดต่อ $\{d\}$ คือ เวกเตอร์ของดีกรีอิสระที่จุดต่อ และ $[\psi]$ คือเมตริกฟังก์ชันรูปร่างโพลีโนเมียลอันดับที่สาม ดังนั้นเมื่อแทนค่าสมการที่ (39) ลงไปในสมการที่ (38) จะได้ดังสมการที่ (40)

$$\begin{aligned}&\{\delta d\}^T\int_{\theta_1}^{\theta_2}[\psi]^T\left(\{\bar{c}_0\}-\frac{p_0}{3}\{\tilde{v}\}\right)d\theta\\&+\{\delta d\}^T\int_{\theta_1}^{\theta_2}[\psi]^T\left[\tilde{k}\right][\psi]d\theta\{d\}\\&+2\pi\{\delta u\}^T\left(\int_{\theta_1}^{\theta_2}\{\psi_u\}\{\psi_u\}^T\rho_s hD\,d\theta\right)\\&+2\pi\{\delta w\}^T\left(\int_{\theta_1}^{\theta_2}\{\psi_w\}\{\psi_w\}^T\rho_s hD\,d\theta\right)=0\end{aligned} \tag{40}$$

ในที่นี้จะเห็นได้ว่าดีกรีอิสระของเอลิเมนต์ (Element Degree of Freedom) $\{d\}$ เหมือนกับดีกรีอิสระรวม (Global Degree of Freedom) $\{D\}$ ดังนั้นผลรวมของงานเสมือนสำหรับระบบโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดสามารถรวมได้โดยตรงโดยใช้สมการที่ (41) ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$[M]\{\ddot{D}\}+[K]\{D\}=\{F\} \tag{41}$$

เมื่อ $[M]$ คือ เมตริกมวลของโครงสร้าง $[K]$ คือ เมตริกสติฟเนสของโครงสร้าง $[F]$ คือ เวกเตอร์ของแรงรวม $\{F\}$ และ $\{D\}$ คือ เวกเตอร์การเคลื่อนที่ของโครงสร้าง และ $\{\ddot{D}\}$ คือ เวกเตอร์ความเร่งของโครงสร้าง ซึ่งจะมีค่าดังสมการที่ (42)–(44)

$$\begin{aligned}[M]=&2\pi\left(\int_{\theta_1}^{\theta_2}\{\psi_u\}\rho_s\{\psi_u\}^T hD\,d\theta\right)\\&+2\pi\left(\int_{\theta_1}^{\theta_2}\{\psi_w\}\rho_s\{\psi_w\}^T hD\,d\theta\right)\end{aligned} \tag{42}$$

$$[K]=\int_{\theta_1}^{\theta_2}[\psi]^T\left[\tilde{k}\right][\psi]d\theta \tag{43}$$

$$\{F\}=\int_{\theta_1}^{\theta_2}[\psi]^T\left(\frac{p_0}{3}\{\tilde{v}\}-\{\bar{c}_0\}\right)d\theta \tag{44}$$

จากสมการที่ (41) จะคำนวณหาค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายในโดยกำหนดให้ $\{F\}$ มีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งจะเป็นการสั่นอิสระแบบสมมาตรของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายใน ดังนั้นสมการที่ (41) จะเขียนเป็นสมการลักษณะเฉพาะ (Characteristic Equation) เป็นปัญหาค่าเจาะจง (Eigenvalue Problem) ดังสมการที่ (45)

$$\left|[K]-\omega_n^2[M]\right|=0 \tag{45}$$

เมื่อ ω_n คือ ความถี่ธรรมชาติ (Natural Frequency)

3. ผลการทดลองและอภิปรายผล

การศึกษาพฤติกรรมการสั่นอิสระของแบบจำลองโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายในได้ถูกพัฒนาขึ้นโดยใช้หลักการของงานเสมือนและวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการคำนวณหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขของค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดการสั่นที่เกิดขึ้น สำหรับโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางที่มีคุณสมบัติตามตารางที่ 1 ซึ่งจำเป็นจะต้องทำการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมโดยเริ่มต้นจากการทดสอบผลการคำนวณค่าพารามิเตอร์ความถี่ของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายในเพื่อหาจำนวนของชิ้นส่วนย่อยที่เหมาะสมดังสมการที่ (46)

$$\lambda=\left(\frac{\rho_s c^2}{E'\eta^2}\right)\omega_n^2 \tag{46}$$

เมื่อ η คือ อัตราส่วนความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดทรงห่วงยางต่อความยาวรัศมีจากแกนหมุนถึงจุดศูนย์กลางของรูปหน้าตัดทรงห่วงยางซึ่งจะสามารถนิยามได้ดังสมการที่ (47)

$$\eta = \frac{c}{a} \tag{47}$$

ตารางที่ 1 ข้อมูลและสมบัติที่ใช้ในการวิเคราะห์

รายการ	ปริมาณ
ความยาวรัศมีจากแกนหมุนถึงจุดศูนย์กลางของรูปหน้าตัดทรงห่วงยาง (c)	7.5 เมตร
ความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดทรงห่วงยาง (a)	1.125 เมตร
ความหนาของโครงสร้าง (h)	1.125 มิลลิเมตร
ความหนาแน่นของวัสดุโครงสร้าง (ρ_s)	7,850 กก/ม^3
มอดุลัสยืดหยุ่น (E')	204×10^3 เมกะปาสคาล
อัตราส่วนปัวซง (μ)	0.3
แรงดันภายในคงที่ (p_0)	20.4 กิโลปาสคาล

ผลการเปลี่ยนแปลงจำนวนชิ้นส่วนย่อยแบบจำลองโครงสร้างเปรียบเทียบกับค่าพารามิเตอร์ความถี่ของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายในดังแสดงในตารางที่ 2 โดยที่ค่าในวงเล็บจะแสดงร้อยละความแตกต่างของค่าพารามิเตอร์ความถี่เมื่อจำนวนชิ้นส่วนย่อยเพิ่มสูงขึ้น จากผลการศึกษาจะพบว่า การแบ่งจำนวนชิ้นส่วนออกเป็น 48 ชิ้นส่วน จะให้คำตอบที่มีความถูกต้องสูงสำหรับค่าความถี่ธรรมชาติในโหมดที่ m = 1 ถึง m = 5 โดยมีความแตกต่างไม่เกินร้อยละ 0.05 เมื่อเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการแบ่งชิ้นส่วนย่อยที่ละเอียดสูงกว่านี้ ดังนั้นงานวิจัยชิ้นนี้จึงเลือกใช้จำนวนชิ้นส่วนเท่ากับ 48 ชิ้นส่วนเท่านั้น

หลังจากนั้นทำการเปรียบเทียบค่าพารามิเตอร์ความถี่ของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายในได้จากงานวิจัยนี้กับผลที่ได้จากโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์สำเร็จรูป ABAQUS [23] ในการสร้างแบบจำลองโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดที่มีความสมมาตรตามแนวแกนที่มีการประมาณค่าการเคลื่อนที่แบบฟังก์ชันโพลิโนเมียลอันดับสอง (Quadratic Membrane) ผลลัพธ์ที่ได้งานวิจัยนี้จะพบว่า มีค่าน้อยกว่าค่าพารามิเตอร์ความถี่ที่ได้จากโปรแกรม ABAQUS ดังแสดงในตารางที่ 3 โดยมีค่าความแตกต่างสูงสุดไม่เกินร้อยละ 8 เมื่อทำการพิจารณาโหมดการสั่นใน 10 โหมดแรก ในขณะที่โหมดการสั่นที่ m = 0 จะเป็นโหมดการสั่นแบบเคลื่อนที่โดยไม่มีการเสียรูป (Rigid Body Mode) โดยที่กรณีนี้จะเกิดขึ้นกับการวิเคราะห์ปัญหา

ตารางที่ 2 การลู่เข้าคำตอบของค่าพารามิเตอร์ความถี่ของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายใน ($\lambda = \rho_s c^2 \omega^2 / E'\eta^2$)

โหมดการสั่น	จำนวนของชิ้นส่วนย่อย				
	12	24	36	48	60
m = 1	0.0112 **(1.831)**	0.0110 **(0.302)**	0.0110 **(0.039)**	0.0110 **(0.009)**	0.0110
m = 2	0.3380 **(24.408)**	0.2717 **(2.366)**	0.2654 **(0.267)**	0.2647 **(0.020)**	0.2646
m = 3	0.3580 **(28.111)**	0.2795 **(2.704)**	0.2721 **(0.304)**	0.2713 **(0.024)**	0.2712
m = 4	0.3773 **(34.119)**	0.2813 **(2.781)**	0.2737 **(0.311)**	0.2728 **(0.024)**	0.2728
m = 5	0.4619 **(47.597)**	0.3129 **(3.477)**	0.3024 **(0.391)**	0.3012 **(0.031)**	0.3011

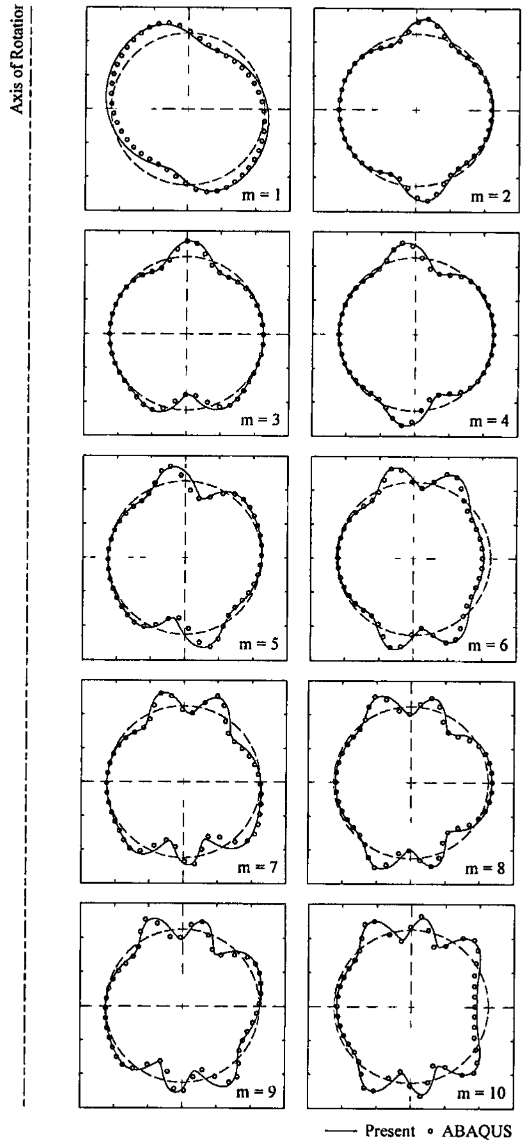
* หมายเหตุ ค่าใน ( ) คือ ค่าร้อยละความแตกต่างเมื่อเทียบกับจำนวนของชิ้นส่วนย่อยที่เพิ่มสูงขึ้น

ที่เป็นแบบเงื่อนไขขอบเขตอิสระเท่านั้น แต่อย่างไรก็ตาม จะพบว่า โหมดการสั่นของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายในจากค่าพารามิเตอร์ความถี่ดังแสดงในตารางที่ 3 จะสอดคล้องกับโหมดการสั่นที่ได้จากโปรแกรม ABAQUS ดังแสดงในรูปที่ 4 นอกจากนี้จะเห็นได้ว่าโหมดการสั่นที่ m = 2, 4, 6, 8 และ 10 จะเป็นโหมดการสั่นแบบสมมาตรตามแนวแกน (Axisymmetric Mode Shapes) ในขณะที่โหมดการสั่นที่ m = 1, 3, 5, 7 และ 9 จะเป็นโหมดการสั่นแบบปฏิสมมาตร (Antisymmetric Mode Shapes) กล่าวคือโหมดการสั่นของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายในจะเกิดโหมดการสั่นแบบเคลื่อนที่โดยไม่มีการเสียรูปก่อนในลำดับแรก หลังจากนั้นจะเกิดโหมดการสั่นแบบสมมาตรตามแนวแกนสลับกับโหมดการสั่นแบบปฏิสมมาตร

ตารางที่ 3 การเปรียบเทียบค่าพารามิเตอร์ความถี่ของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายใน ($\lambda = \rho_s c^2 \omega^2 / E'\eta^2$)

โหมดการสั่น	ABAQUS	งานวิจัยนี้	ร้อยละความแตกต่าง
m = 1	0.0115	0.0110	4.34
m = 2	0.2820	0.2647	6.13
m = 3	0.2908	0.2713	6.72
m = 4	0.2926	0.2728	6.74
m = 5	0.3243	0.3012	7.12
m = 6	0.4415	0.4205	4.76
m = 7	0.4933	0.4614	6.47
m = 8	0.5031	0.4671	7.16
m = 9	0.5576	0.5137	7.89
m = 10	0.5950	0.5625	5.47

จากผลการตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายในที่ได้จากงานวิจัยนี้ ก็จะสามารถทำการศึกษาค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ของโครงสร้างที่ส่งผลกระทบต่อค่า



รูปที่ 4 โหมดการสั่นของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายใน

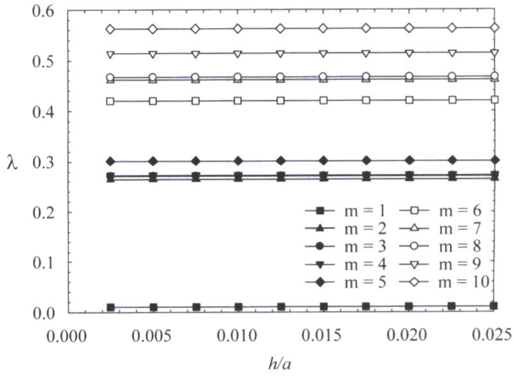
พารามิเตอร์ความถี่ของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายในโดยการเปลี่ยนแปลงความหนาและแรงดันภายในภายใต้ค่าพารามิเตอร์ของความเค้นคงที่ต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่ ความยาวรัศมีของหน้าตัด แรงดันภายใน และมอดุลัสยืดหยุ่นของโครงสร้างจากข้อมูลในตารางที่ 1 ซึ่งจะสามารถเขียนความสัมพันธ์ของค่าต่างๆ ในเทอมไร้มิติดังสมการที่ (48)

$$\kappa = \frac{p_0 a}{E'h} \tag{48}$$

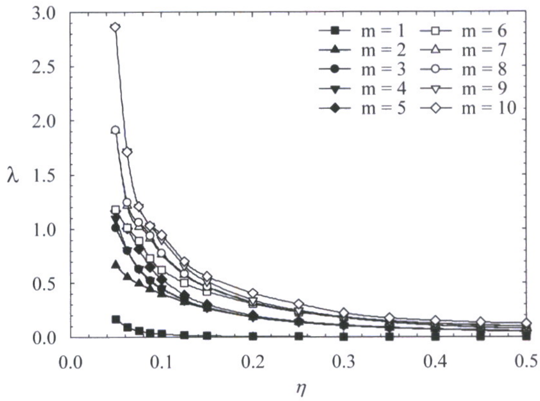
เมื่อ κ คือ ค่าพารามิเตอร์ของความเค้นที่เกิดขึ้นในโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางเนื่องจากแรงดันภายใน และจากข้อมูลในตารางที่ 1 จะได้ว่า κ = 0.0001, η = 0.15 และ h/a = 0.001 โดยสามารถทำการศึกษาค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ได้ดังหัวข้อต่อไปนี้

3.1 ผลของความหนาและแรงดันภายในภายใต้ค่าพารามิเตอร์ของความเค้นคงที่ต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่

การศึกษาผลของการเปลี่ยนแปลงความหนาของโครงสร้างที่มีต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่ของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายใน จะสามารถทำได้โดยการปรับเปลี่ยนอัตราส่วนความหนาของโครงสร้างต่อความยาวรัศมีจาก h/a = 0.0025 ถึง 0.0250 โดยที่ความยาวรัศมีของโครงสร้างและค่าพารามิเตอร์ของความเค้น κ ไม่เปลี่ยนแปลง ซึ่งจะพบว่า การเปลี่ยนแปลงค่าความหนาของโครงสร้างจะไม่ส่งผลต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่สำหรับทุกโหมดการสั่นของโครงสร้าง ดังแสดงในรูปที่ 5 เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงค่าความหนาของโครงสร้างจะส่งผลทำให้ค่าแรงดันภายในมีค่าเปลี่ยนแปลงตามไปด้วย โดยที่ค่าพารามิเตอร์ของความเค้นยังคงมีค่าเป็น κ = 0.0001 และ η = 0.15 แสดงให้เห็นว่าค่าพารามิเตอร์ของความเค้นมีผลในการควบคุมทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติไม่เปลี่ยนแปลง อย่างไรก็ตาม ถ้าการวิเคราะห์ค่าความถี่ธรรมชาติไม่ได้มีการกำหนดค่าพารามิเตอร์ของความเค้นเป็นค่าคงที่ ก็จะพบว่าการเปลี่ยนแปลงค่าความหนาของโครงสร้างจะทำให้ค่าความแข็งแกร่ง (Stiffness) ของโครงสร้างมีค่าเพิ่มสูงขึ้นส่งผลทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติมีค่าเพิ่มสูงขึ้นตามไปด้วย



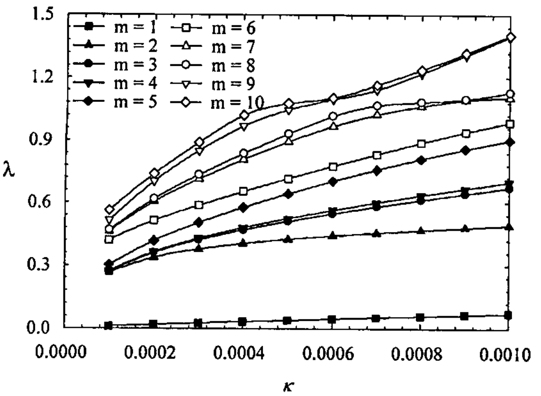
รูปที่ 5 ผลของความหนาและแรงดันภายในภายใต้ค่าพารามิเตอร์ของความเค้นคงที่ต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่



รูปที่ 6 ผลของความยาวรัศมีที่มีต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่

3.2 ผลของความยาวรัศมีที่มีต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่

สำหรับหัวข้อย่อยนี้จะเป็นการศึกษาผลของการเปลี่ยนแปลงความยาวรัศมีของโครงสร้างที่มีต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่ของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายในดังแสดงในรูปที่ 6 โดยการปรับเปลี่ยนอัตราส่วนความหนาของโครงสร้างต่อความยาวรัศมีจากแกนหมุนถึงจุดศูนย์กลางของรูปหน้าตัดทรงห่วงยางจาก η = 0.05 ถึง 0.50 โดยที่ความยาวรัศมีจากแกนหมุนถึงจุดศูนย์กลางของรูปหน้าตัดทรงห่วงยางและค่าพารามิเตอร์ของความเค้น κ ไม่เปลี่ยนแปลง จากผลการศึกษาจะพบว่า เมื่อค่าความยาวรัศมีของโครงสร้างมีค่าน้อยๆ จะส่งผลกระทบต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่สูงมาก ในขณะที่เมื่อค่าความยาวรัศมีของโครงสร้างมีค่าสูงๆ จะส่งผลกระทบเพียงเล็กน้อย กล่าวคือเมื่อความชันของพารามิเตอร์ความถี่จะมีค่าลดลงเมื่อค่า η เพิ่มสูงขึ้น เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงค่าความยาวรัศมีของโครงสร้างจะส่งผล



รูปที่ 7 ผลของแรงดันภายในที่มีต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่

ทำให้ค่าความหนาของโครงสร้างมีค่าเพิ่มขึ้นตามไปด้วย โดยที่ค่าพารามิเตอร์ของความเค้นยังคงมีค่าเป็น κ = 0.0001 และอัตราส่วน h/a = 0.001

3.3 ผลของแรงดันภายในที่มีต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่

รูปที่ 7 แสดงผลของการเปลี่ยนแปลงแรงดันภายในของโครงสร้างที่มีต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่ของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายในโดยการปรับเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ของความเค้น κ = 0.0001 ถึง 0.0010 โดยที่อัตราส่วน h/a = 0.001, η = 0.15 และมอดุลัสยืดหยุ่นของโครงสร้างไม่มีการเปลี่ยนแปลง

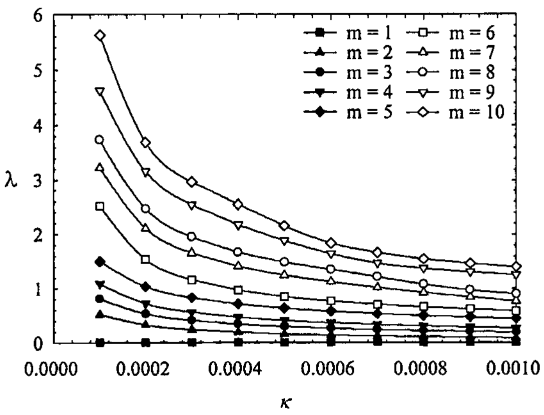
ซึ่งพบว่า ที่โหมดการสั่น m = 1 ถึง m = 7 ค่าความชันของพารามิเตอร์ความถี่จะมีค่าลดลงเมื่อค่าพารามิเตอร์ของความเค้นมีเพิ่มสูงขึ้น สำหรับโหมดการสั่นในลำดับที่ m = 8 ถึง m = 10 ค่าความสัมพันธ์ระหว่างค่าพารามิเตอร์ความถี่กับค่าพารามิเตอร์ของความเค้นจะมีกราฟเป็นสองช่วงเป็นกราฟหงายและกราฟคว่ำ โดยที่โหมดการสั่น m = 8 จะมีจุดดัดกลับของกราฟอยู่ในช่วงค่าพารามิเตอร์ของความเค้น κ = 0.0009 และที่โหมดการสั่น m = 9 กับ m = 10 จะมีจุดดัดกลับของกราฟอยู่ในช่วงค่าพารามิเตอร์ของความเค้น κ = 0.0006

3.4 ผลของมอดุลัสยืดหยุ่นที่มีต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่

สำหรับค่าพารามิเตอร์สุดท้ายที่จะทำการศึกษาจะเป็นผลของค่ามอดุลัสยืดหยุ่นของโครงสร้างที่มีต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่ของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายในโดยการปรับเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ของความเค้น κ = 0.0001 ถึง 0.0010 โดยที่อัตราส่วน h/a = 0.001, η = 0.15 และแรงดันภายในของโครงสร้างไม่มีการเปลี่ยนแปลง จากผลการศึกษาจะพบว่า ความชันของค่าพารามิเตอร์ความถี่จะมีค่าลดลงเมื่อค่าพารามิเตอร์ของความเค้นมีค่าเพิ่มสูงขึ้นหรือค่ามอดุลัสยืดหยุ่นของโครงสร้างมีค่าลดลงดังแสดงในรูปที่ 8 กล่าวคือ ค่าพารามิเตอร์ความถี่จะมีค่าลดลงเมื่อค่าพารามิเตอร์ของความเค้นมีค่าเพิ่มสูงขึ้นหรือค่ามอดุลัสยืดหยุ่นของโครงสร้างมีค่าลดลงสำหรับทุกโหมดการสั่น ซึ่งจะสังเกตุเห็นได้ว่าผลที่ได้จากมีลักษณะตรงกันข้ามกับผลของการเปลี่ยนแปลงแรงดันภายในของโครงสร้างที่มีต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่ ดังแสดงในรูปที่ 7

4. สรุป

การศึกษาค่าความถี่ธรรมชาติและโหมดการสั่นแบบสมมาตรของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายใน โดยการเขียนปัญหาในรูปแบบการแปรผันและใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการจำลองโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดด้วยชิ้นส่วนคานแบบ 1 มิติ และหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่เป็นปัญหาแบบค่าเจาะจง จากผลการศึกษาจะพบว่า โหมดการสั่นของโครงสร้างเปลือกบางไร้แรงดัดรูปทรงห่วงยางภายใต้แรงดันภายในจะเกิดโหมดการสั่นแบบสมมาตรตามแนวแกนสลับกับโหมดการสั่นแบบปฏิสมมาตร สำหรับการศึกษาค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ของโครงสร้างจะสามารถสรุปได้ว่าการเปลี่ยนแปลงความหนาและแรงดันภายในภายใต้ค่าพารามิเตอร์ของความเค้นคงที่จะไม่ส่งผลกระทบต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่ของโครงสร้างในขณะที่การเปลี่ยนแปลงความยาวรัศมี แรงดันภายใน และมอดุลัสยืดหยุ่นของโครงสร้างจะส่งผลกระทบโดยตรงต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่ของโครงสร้าง เมื่อกำหนดให้ค่าอัตราส่วนความหนาต่อความยาวรัศมีของโครงสร้าง อัตราส่วนความยาวรัศมีของรูปหน้าตัดทรงห่วงยางต่อความยาวรัศมีจากแกนหมุนถึงจุดศูนย์กลางของรูปหน้าตัดทรงห่วงยาง และค่า



รูปที่ 8 ผลของมอดุลัสยืดหยุ่นที่มีต่อค่าพารามิเตอร์ความถี่

พารามิเตอร์ของความเค้นที่เกิดขึ้นในโครงสร้างไม่มีการเปลี่ยนแปลงภายใต้เงื่อนไขที่กำหนด

5. กิตติกรรมประกาศ

โครงการวิจัยได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสานตามสัญญาเลขที่ NKR2564 INC001

เอกสารอ้างอิง

[1] W. Jiammeepreecha, "Finite element analysis of toroidal membrane under external pressure," *UBU Engineering Journal,* vol. 9, no. 2, pp. 47–56, 2016 (in Thai).

[2] B. Sun, "Closed-form solution of axisymmetric slender elastic toroidal shells," *Journal of Engineering Mechanics,* vol. 136, no. 10, pp. 1281–1288, 2010.

[3] W. Jiammeepreecha and S. Chucheepsakul, "Nonlinear static analysis of an underwater elastic semi-toroidal shell," *Thin-Walled Structures,* vol. 116, pp. 12–18, 2017.

[4] W. Jiammeepreecha, J. Suebsuk, and S. Chucheepsakul, "Nonlinear static analysis of liquid-containment toroidal shell under hydrostatic pressure," *Journal of Structural Engineering,* vol. 146, no. 1, pp. 04019169-1–04019169-9, 2020.

[5] A. Y. T. Leung and N. T. C. Kwok, "Free vibration analysis of a toroidal shell," *Thin-Walled Structures,* vol. 18, no. 4, pp. 317–332, 1994.

[6] R. S. Ming, L. Pan, and M. P. Norton, "Free vibrations of elastic circular toroidal shells," *Applied Acoustics,* vol. 63, no. 5, pp. 513–528, 2002.

[7] X. H. Wang and D. Redekop, "Natural frequencies and mode shapes of an orthotropic thin shell of revolution," *Thin-Walled Structures,* vol. 43, no. 5, pp. 735–750, 2005.

[8] J. H. Kang, "Vibration analysis of toroidal shells with hollow circular cross-section having variable thickness," *Journal of Engineering Mechanics,* vol. 142, no. 9, pp. 04016058-1–04016058-9, 2016.

[9] K. Federhofer, "Zur schwingzahlberechnung des diinnwandigen hohlenreifens," *Ingr.-Arch,* vol. 10-11, pp. 125–132, 1939–1940.

[10] A. A. Liepins, "Free vibrations of prestressed toroidal membrane," *AIAA Journal*, vol. 3, no. 10. pp. 1924–1933, 1965.

[11] A. A. Liepins, *Flexural vibrations of the prestressed toroidal shell,* National Aeronautics and Space Administration, Washington D.C., Rep. NASA CR-296, 1965.

[12] Z. Fang, "Free vibration of fluid-filled toroidal shells," *Journal of Sound and Vibration,* vol. 155, no. 2, pp. 343–352, 1992.

[13] T. Kosawada, K. Suzuki, and S. Takahashi, "Free vibrations of toroidal shells," *Bull of JSME,*

vol. 28, no. 243, pp. 2041–2047, 1985.

[14] A. K. Jha, D. J. Inman, and R. H. Plaut, "Free vibration analysis of an inflated toroidal shell," *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 124, no. 3, pp. 387–396, 2002.

[15] W. Jiammeepreecha, "Effects of internal pressure and constraint volume on vibration of spherical membrane," *RMUTI Journal,* vol. 10, no. 2, pp. 40–61, 2017 (in Thai).

[16] W. Jiammeepreecha, "Axisymmetric free vibration of fluid-filled membrane," *Engineering Journal Chiang Mai University,* vol. 25, no. 3, pp. 66–78, 2018 (in Thai).

[17] W. Jiammeepreecha and S. Chucheepsakul, "Nonlinear axisymmetric free vibration analysis of liquid-filled spherical shell with volume constraint," *Journal of Vibration and Acoustics,* vol. 139, no. 5, pp. 051016-1–051016-13, 2017.

[18] W. Jiammeepreecha and S. Chucheepsakul, "Nonlinear free vibration of internally pressurized axisymmetric spherical shell," *KMUTT Research and Development Journal,* vol. 40, no. 4, pp. 509–532, 2017 (in Thai).

[19] K. Chaidachatorn, J. Supromwan, K. Thipyotha, and W. Jiammeepreecha, "Nonlinear static response and free vibration of pressurized semi-torus," presented at the Proceedings of the 25th National Convention on Civil Engineering, Chonburi, Thailand, July. 15-17, 2020.

[20] H. L. Langhaar, *Foundations of Practical Shell Analysis.* Illinois: Department of Theoretical and Applied Mechanics, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1964.

[21] H. L. Langhaar, *Energy Methods in Applied Mechanics.* John Wiley & Sons, 1962.

[22] R. D. Cook, D. S. Malkus, M. E. Plesha, and R. J. Witt, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis.* John Wiley & Sons, Inc., 2002.

[23] *ABAQUS Analysis User's Manual,* Hibbitt, Karlsson and Sorensen, Pawtucket, Rhode Island, 2017.