Journal of Graduate Studies Valaya Alongkron Rajabhat University
Vol. 15 No. 2 (May - August 2021)

การวิจัยปฏิบัติการในชั้นเรียน เพื่อส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยใช้ 5 แนวปฏิบัติการสอน

AN CLASSROOM ACTION RESEARCH FOR PROMOTE ABILITIES IN GEOMETRIC PROOF OF GRADE 8 STUDENTS BY USING THE FIVE PRACTICES

ศุภานัน ทองประไพ[1] และณัชชา กมล [2*]
Suphanan Thongpraphai[1] and Natcha Kamol [2*]

[1] หลักสูตรศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตรศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
[2*] ผู้ช่วยศาตราจารย์ ดร. ประจำสาขาคณิตศาสตรศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
[1] Master of Education Program in Mathematics Education, Faculty of Education, Chiang Mai University
[2*] Asst. Prof. Dr., Department of Mathematics Education, Faculty of Education, Chiang Mai University (Corresponding Author)
E-mail: natcha.ka@cmu.ac.th

Received: May 9, 2020
Revised: August 23, 2020
Accepted: August 24, 2020

บทคัดย่อ

การวิจัยปฏิบัติการในชั้นเรียนนี้มีวัตถุประสงค์ เพื่อส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตผ่านการออกแบบ และจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ 5 แนวปฏิบัติการสอน กลุ่มเป้าหมายโดยเลือกแบบเจาะจง เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2/1 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยเชียงใหม่ จำนวน 42 คน เครื่องมือในการวิจัย ประกอบด้วย แผนการจัดการเรียนรู้ จำนวน 9 แผน บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้ ใบงานตรวจสอบความเข้าใจ และแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตแบบอัตนัย จำนวน 9 ข้อ มีค่าอำนาจจำแนกอยู่ในช่วง 0.23 – 0.86 ค่าความยากง่ายอยู่ในช่วง 0.21 – 0.54 และค่าความเชื่อมั่น เท่ากับ 0.93 ดำเนินการวิจัยโดยใช้กระบวนการวิจัยปฏิบัติการในชั้นเรียน 4 ขั้นตอน ประกอบด้วย ขั้นวางแผน ขั้นปฏิบัติตามแผน ขั้นสังเกตผลการปฏิบัติ และขั้นสะท้อนผลการปฏิบัติ จำนวน 3 วงจรต่อเนื่องกัน ผ่านการใช้ 5 แนวปฏิบัติการสอน

ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนส่วนใหญ่มากกว่าร้อยละ 64.29 มีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตในระดับดีขึ้นไป โดยนักเรียนสามารถแสดงการพิสูจน์ทางเรขาคณิต โดยอ้างอิง นิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบททางเรขาคณิตได้ถูกต้องเป็นส่วนใหญ่และทั้งหมด

คำสำคัญ

5 แนวปฏิบัติการสอน การพิสูจน์ทางเรขาคณิต ความสามารถการพิสูจน์ทางเรขาคณิต เรขาคณิต วิจัยปฏิบัติการในชั้นเรียน

ABSTRACT

This classroom action research was aimed to promote abilities in geometric proof by using the Five Practices to design and organize learning activities. The target group consisted of 42 grade 8 students at Chiang Mai University Demonstration School. They were chosen by purposive sampling. The research instruments included 9 lesson plans, post-instruction notes, worksheets, and 9 items subjective test on the student's abilities in geometric proof that showed the discrimination ranged from 0.23 to 0.86, the difficulty ranged from 0.21 to 0.54 and the reliability was 0.93. The research was conducted along the 4 steps of continuous 3 cycles of classroom action research (PAOR) composed of Plan, Act, Observe and Reflect that used the Five Practices.

The findings reveal that the most students had geometric proof abilities from good level up to very good level, 64.29%. In which students were able to demonstrate geometric proof by referring to the definitions, axioms, and geometric theorems mostly correct and all.

Keywords

The Five Practices, Geometric Proof, Abilities in Geometric Proof, Geometry, Classroom Action Research

ความสำคัญของปัญหา

จากการวิเคราะห์การจัดการเรียนรู้ในวิชาคณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ผ่านมา พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่ไม่สามารถแสดงการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง ถึงแม้งานเกี่ยวกับการพิสูจน์ที่มอบหมายให้นักเรียนแสดงการพิสูจน์เป็นงานที่มีความเป็นรูปธรรมค่อนข้างชัดเจน เช่น งานเกี่ยวกับการพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่เน้นรูปเรขาคณิต เป็นต้น แต่นักเรียนไม่สามารถวิเคราะห์สิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ได้ บางครั้งนักเรียนนำข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีบททางเรขาคณิตมาอ้างอิงในการให้เหตุผล ทั้งยังแสดงกระบวนการพิสูจน์ที่ไม่เป็นลำดับขั้นตอนที่สมเหตุสมผลอีกด้วย ซึ่งเมื่อวิเคราะห์ถึงสาเหตุของปัญหาดังกล่าว พบว่า การจัดการเรียนรู้เกี่ยวกับการพิสูจน์ทางเรขาคณิต เป็นการจัดการเรียนรู้ที่ไม่ได้เปิดโอกาสให้นักเรียนได้ลองพิสูจน์ด้วยตัวเองตามพื้นฐานการเรียนรู้ หรือระดับการเรียนรู้ของนักเรียน งานเกี่ยวกับการพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่มอบหมายให้นักเรียนยังไม่กระตุ้นให้นักเรียนมีโอกาสแสดงแนวคิดในการให้เหตุผลของตนเอง ส่วนกิจกรรมการเรียนรู้ที่เกิดขึ้นยังขาดการสร้างบรรยากาศให้นักเรียนอภิปราย โต้ตอบ แลกเปลี่ยนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตร่วมกัน ทำให้นักเรียนมีปัญหาในขั้นตอนการแสดงการพิสูจน์ โดยนักเรียนขาดความระมัดระวังในการเขียนการ

พิสูจน์ และนักเรียนไม่เข้าใจวิธีการเขียนพิสูจน์ว่าเริ่มต้นอย่างไร (Brikshavana, 2017) ซึ่งสิ่งเหล่านี้เป็นเงื่อนไขสำคัญประการหนึ่งในการเรียนรู้เรขาคณิตในระดับโรงเรียน

เรขาคณิตระดับโรงเรียนถือเป็นส่วนหนึ่งของสาระการเรียนรู้การวัดและเรขาคณิตในหลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 โดยกำหนดให้นักเรียนต้องมีความเข้าใจและวิเคราะห์ รูปเรขาคณิต สมบัติของรูปเรขาคณิต ความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิต และสามารถนำสมบัติต่าง ๆ ไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาได้ (The Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology [IPST], 2019) ซึ่งทักษะกระบวนการในการให้เหตุผลถือว่ามีความสำคัญต่อการเรียนรู้เรขาคณิต โดยการพิสูจน์ทางเรขาคณิตถือเป็นทักษะกระบวนการในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อย่างสมเหตุสมผล (Goldberger, 2002) และเป็นทักษะ และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นที่ช่วยส่งเสริมให้นักเรียนรู้จักคิดอย่างมีเหตุผล คิดอย่างเป็นระบบ และสามารถวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ เพื่อหาข้อสรุปที่เป็นเหตุเป็นผล โดยการอ้างอิงความรู้ ข้อเท็จจริงตามหลักการทางคณิตศาสตร์ (IPST, 2012) ดังนั้น ความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต จึงมีความสำคัญต่อผู้สอนที่จะออกแบบและจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้ส่งเสริมความสามารถดังกล่าว

การจัดการเรียนรู้เพื่อส่งเสริมการพิสูจน์ทางเรขาคณิตนั้น ผู้สอนควรเริ่มฝึกให้นักเรียนพิสูจน์อย่างไม่เป็นทางการก่อนผ่านการเรียนรู้ร่วมกันในงานทางคณิตศาสตร์ (Mathematic tasks) ที่ไม่ซับซ้อน มีขั้นตอนการคิด และการหาคำตอบที่ไม่ยุ่งยาก เพื่อให้นักเรียนคุ้นเคยกับการคิดวิเคราะห์การคิดเชิงตรรกะ จากนั้นค่อยฝึกการพิสูจน์อย่างเป็นทางการผ่านการเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ การใช้ทฤษฎีบท บทนิยาม และสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเรขาคณิต มาประกอบการให้เหตุผลอย่างสมเหตุสมผล (Makanong, 2015) ซึ่งผู้สอนควรเลือกงานทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมกับระดับการรู้คิดของนักเรียน และเปิดโอกาสให้นักเรียนได้อภิปรายร่วมกัน สอดคล้องกับ Henningsen and Stein (1997) ที่เสนอว่า การจัดการเรียนรู้ผ่านการใช้งานทาง คณิตศาสตร์ ช่วยสร้างการคิดและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้สอนต้องเลือกงานทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมในการพัฒนาการคิดและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน นอกจากนี้ Martin, McCrone, Bower, and Dindyal (2005) และ Hanna (2000) ได้กล่าวว่า การพัฒนานักเรียนให้มีความสามารถในการให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางเรขาคณิตได้นั้น ผู้สอนควรออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ในการพิสูจน์ที่เปิดโอกาสให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการพิสูจน์ และได้แสดงแนวคิดทางการพิสูจน์ด้วยตัวเองจากสถานการณ์ง่าย ๆ ไปสู่สถานการณ์ที่มีความซับซ้อนมากขึ้น ซึ่งการจัดการเรียนรู้ข้างต้นสอดคล้องกับ 5 แนวปฏิบัติการสอน (The five practices) ที่พัฒนาขึ้นโดย Smith and Stein (2011) ในการออกแบบ และจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เพื่อส่งเสริมให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติกิจกรรม อภิปรายแลกเปลี่ยนเรียนรู้ร่วมกัน และสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเองผ่านงานทางคณิตศาสตร์ที่ท้าทาย ประกอบด้วย 1) การคาดการณ์ 2) การติดตามตรวจสอบ 3) การเลือก 4) การจัดลำดับ และ 5) การเชื่อมโยง และจากงานวิจัยของ Martin et al. (2005) และ Moothummachai and Kamol (2017) ได้กล่าวว่า การมอบหมายงานทางคณิตศาสตร์ที่เน้นการพิสูจน์ทางเรขาคณิต และการอภิปรายเหตุผล พร้อมทั้งใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียนเกิดการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ร่วมกันช่วยส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ได้ นอกจากนี้ Chaiyawong and Kamol

(2018) ได้กล่าวว่า การใช้ 5 แนวปฏิบัติการสอนในการอภิปรายร่วมกันทั้งชั้นเรียนผ่านการใช้คำถามกระตุ้นการอภิปราย ทำให้นักเรียนเชื่อมโยงแนวคิดไปสู่การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องชัดเจนได้ ดังนั้น การใช้ 5 แนวปฏิบัติการสอนจึงน่าจะเป็นแนวทางหนึ่งในการจัดการเรียนรู้ที่ส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตได้

จากความเป็นมาข้างต้น ผู้วิจัยมองเห็นความสำคัญและประโยชน์ของการส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต โดยใช้ 5 แนวปฏิบัติการสอนมาเป็นแนวทางในการออกแบบและจัดกิจกรรมการเรียนรู้ จึงได้ดำเนินวิจัยผ่านกระบวนการวิจัยปฏิบัติการในชั้นเรียนเพื่อส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

โจทย์วิจัย/ปัญหาวิจัย

การใช้ 5 แนวปฏิบัติการสอนในการออกแบบและจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ช่วยส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตอย่างไร

วัตถุประสงค์การวิจัย

เพื่อส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยใช้ 5 แนวปฏิบัติการสอน

กรอบแนวคิดการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้อาศัยกรอบแนวคิด 3 ประเด็นหลัก คือ ความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต 5 แนวปฏิบัติการสอน และการวิจัยปฏิบัติการในชั้นเรียน ดังนี้

ความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต (Abilities in geometric proof) หมายถึง ความสามารถในการแสดงการพิสูจน์ทางเรขาคณิต โดยอ้างอิง นิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบททางเรขาคณิตอย่างถูกต้อง ชัดเจน และสามารถดำเนินการพิสูจน์อย่างเป็นลำดับขั้นตอน เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปในการพิสูจน์ ในเรื่อง เส้นขนาน ตามกรอบแนวคิดของ Gutierrez, Pegg, and Lawrie (2004) โดยประเมินจากใบงานตรวจสอบความเข้าใจ และแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

5 แนวปฏิบัติการสอน (The five practices) หมายถึง แนวทางในการออกแบบ และจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่พัฒนาขึ้น โดย Smith and Stein (2011) ซึ่งผู้วิจัยได้ประยุกต์แนวทางในการออกแบบ และการจัดกิจกรรมการเรียนรู้นี้มาใช้ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง เส้นขนาน เพื่อส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ประกอบด้วย

การคาดการณ์ (Anticipating) เป็นการที่ผู้สอนคาดการณ์แนวคิดที่เป็นไปได้ทั้งหมดของนักเรียน ในการตอบสนองต่องานทางคณิตศาสตร์ที่ผู้สอนสร้างขึ้น โดยเน้นกระตุ้นความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียน เพื่อให้นักเรียนแสดงความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ซึ่งอยู่ในขั้นตอนของการออกแบบการจัดการเรียนรู้

การติดตามตรวจสอบ (Monitoring) เป็นการที่ผู้สอนสังเกตการตอบสนองงานทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ผู้สอนสร้างขึ้น ขณะที่นักเรียนลงมือทำงานทั้งงานกลุ่ม และงานเดี่ยว

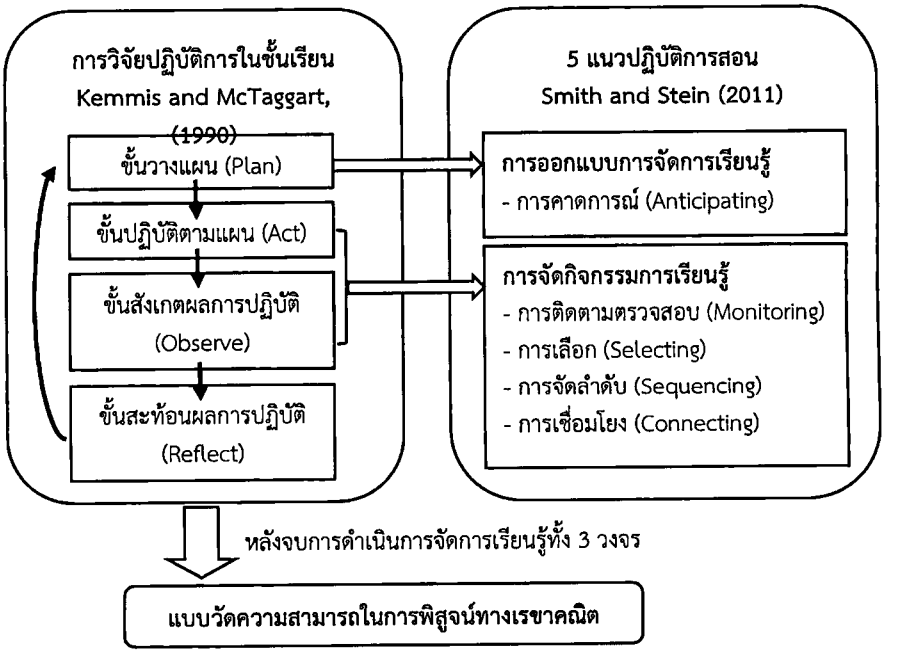
พร้อมทั้งตรวจสอบแนวคิดของนักเรียนที่เกิดขึ้นทั้งหมด ทั้งที่สอดคล้อง และไม่สอดคล้องกับที่ผู้สอนคาดการณ์ไว้ เพื่อเป็นข้อมูลในการเลือกแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

การเลือก (Selecting) เป็นการที่ผู้สอนทำการเลือกแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่มีแนวคิดแตกต่างกัน โดยเลือกแนวคิดทางคณิตศาสตร์อย่างมีเป้าหมาย เพื่อนำไปสู่การอภิปรายในชั้นเรียน

การจัดลำดับ (Sequencing) เป็นการที่ผู้สอนนำแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ผู้สอนได้เลือกไว้ มาจัดลำดับอย่างมีเป้าหมาย เพื่อนำเสนอแนวคิดของนักเรียนที่มีการตอบสนองต่องานทางคณิตศาสตร์ และช่วยให้การอภิปรายบรรลุเป้าหมายที่วางไว้

การเชื่อมโยง (Connecting) เป็นการที่ผู้สอนเชื่อมโยงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่จัดลำดับไว้ เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนสามารถสรุปแนวคิดทางคณิตศาสตร์ด้วยตนเองผ่านการอภิปรายร่วมกันในชั้นเรียน

การวิจัยปฏิบัติการในชั้นเรียน (Classroom action research) เป็นการวิจัยที่ทำโดยครูผู้สอน เพื่อค้นหาวิธีการแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นในชั้นเรียน และนำผลที่ได้มาวิเคราะห์และปรับปรุงการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ หรือส่งเสริมพัฒนาการการเรียนรู้ของนักเรียนให้ดียิ่งขึ้น เพื่อให้เกิดประโยชน์สูงสุดกับนักเรียน (Wongwanich, 2016) ซึ่งแนวคิดในการวิจัยปฏิบัติการในชั้นเรียนประกอบด้วยขั้นตอนการปฏิบัติการ 4 ขั้นตอน (Kemmis & McTaggart, 1990) คือ 1) ขั้นวางแผน (Plan) 2) ขั้นปฏิบัติตามแผน (Act) 3) ขั้นสังเกตผลการปฏิบัติ (Observe) และ 4) ขั้นสะท้อนผลการปฏิบัติ (Reflect) ดังภาพที่ 1 ดังนี้



ภาพที่ 1 แสดงกรอบแนวคิดในการวิจัย

วิธีดำเนินการวิจัย

1) กลุ่มเป้าหมายที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2/1 จำนวน 42 คน โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2561 โดยเลือกแบบเจาะจง ซึ่งเป็นชั้นเรียนที่ผู้วิจัยรับผิดชอบสอน และศึกษาปัญหาที่เกิดขึ้นจากการจัดการเรียนการสอนที่ผ่านมาในชั้นเรียนดังกล่าว

2) ขอบเขตเนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยเป็นเนื้อหาเรื่อง เส้นขนาน ในรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พ.ศ. 2551

3) เครื่องมือที่ใช้ในการทำวิจัย ประกอบด้วย แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง เส้นขนาน ที่ออกแบบการจัดการเรียนรู้ โดยใช้ 5 แนวปฏิบัติการสอน จำนวน 9 แผน รวม 9 คาบ (คาบละ 50 นาที) บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้ ใบงานตรวจสอบความเข้าใจ และแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตแบบอัตนัย จำนวน 9 ข้อ โดยมีค่าอำนาจจำแนกอยู่ในช่วง 0.23 – 0.86 ค่าความยากง่ายอยู่ในช่วง 0.21 – 0.54 และค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.93 ซึ่งประเมินความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตตามเกณฑ์การประเมินความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต แสดงดังตารางที่ 1

4) กิจกรรมการพัฒนาและวิธีรวบรวมข้อมูล การวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยเป็นผู้จัดกิจกรรมการเรียนรู้และเก็บรวบรวมข้อมูลด้วยตนเอง ซึ่งขอบเขตของเนื้อหาที่สอนเป็นเรื่อง เส้นขนาน ประกอบด้วยเนื้อหา เรื่อง สมบัติของเส้นขนาน เส้นขนานและรูปสามเหลี่ยม และการนำไปใช้ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ใช้เวลาในการเก็บรวบรวมข้อมูล 3 สัปดาห์ รวมทั้งสิ้น 9 ชั่วโมง ดำเนินการวิจัย โดยใช้กระบวนการวิจัยปฏิบัติการในชั้นเรียน ตามวงจร PAOR 4 ขั้นตอน รวมทั้งสิ้น 3 วงจร ประกอบด้วยวงจรที่ 1 สมบัติเส้นขนาน วงจรที่ 2 เส้นขนานและรูปสามเหลี่ยม และวงจรที่ 3 การนำไปใช้ โดยแต่ละวงจรดำเนินการวิจัยผ่านขั้นตอนการวิจัยปฏิบัติการในชั้นเรียนมี 4 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นวางแผน (Plan) เป็นการกำหนดเป้าหมาย เพื่อออกแบบงานทางคณิตศาสตร์ที่ส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต พร้อมทั้งสร้างเกณฑ์การประเมินความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต รวมทั้งคาดการณ์แนวคิดทั้งหมดของนักเรียนที่ตอบสนองต่องานทางคณิตศาสตร์ที่ออกแบบไว้

ขั้นปฏิบัติตามแผน (Act) และขั้นสังเกตผลการปฏิบัติ (Observe) ผู้วิจัยดำเนินการสอนตามแผนที่วางไว้ โดยในแต่ละคาบเรียนมีขั้นตอนการสอนที่ประกอบด้วย ขั้นนำ ขั้นสอน ขั้นอภิปรายและสรุป และขั้นประเมินผล ซึ่งมีการบันทึกวีดิทัศน์การจัดการเรียนรู้ในแต่ละคาบเรียน เมื่อมอบหมายงานทางคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียน ผู้สอนดำเนินการติดตามตรวจสอบการทำงานของนักเรียน เลือก จัดลำดับ และเชื่อมโยงแนวคิดของนักเรียนผ่านการอภิปรายร่วมกันในชั้นเรียน เพื่อนำไปสู่เป้าหมายการเรียนรู้ของคาบเรียนนั้น

ขั้นสะท้อนผลการปฏิบัติ (Reflect) ผู้วิจัยทำการบันทึกหลังการจัดการเรียนรู้จากการสังเกตชั้นเรียน และวีดิทัศน์การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ โดยเขียนบรรยายถึงการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ พฤติกรรมของนักเรียนที่แสดงถึงความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ปัญหาและอุปสรรค รวมถึงวิธีการแก้ไข และข้อเสนอแนะ เพื่อนำไปปรับปรุงแก้ไขในวงจรต่อไป

5) ผลการปฏิบัติและการสะท้อนผลแต่ละวงจรแสดงรายละเอียด ดังนี้

วงจรที่ 1 เรื่อง สมบัติของเส้นขนาน ผู้วิจัยดำเนินการสอน โดยใช้งานทางคณิตศาสตร์ที่เน้นลงมือปฏิบัติงานเป็นกลุ่ม และมอบหมายงานทางคณิตศาสตร์ที่กระตุ้นการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ในระหว่างการทำงานทางคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยทำหน้าที่สังเกต เพื่อนำไปสู่การใช้คำถามกระตุ้นการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต พร้อมทั้งติดตามตรวจสอบแนวคิดของแต่ละกลุ่ม เพื่อเลือกและจัดลำดับแนวคิดตามที่ได้คาดการณ์แนวคิดไว้ โดยเรียงลำดับจากการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่ไม่เป็นทางการ ไปสู่การเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่เป็นทางการ เป็นลำดับขั้นตอนและสมเหตุสมผล รวมไปถึงการอภิปรายเชื่อมโยงแนวคิดในขั้นสรุป พบว่า การออกแบบงานทางคณิตศาสตร์สามารถกระตุ้นการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนได้ แต่ในขั้นอภิปรายและเชื่อมโยงแนวคิด นักเรียนส่วนใหญ่ยังไม่สามารถเชื่อมโยง และสรุปแนวคิดที่ได้ ซึ่งอาจเกิดจากผู้วิจัยยังใช้คำถามไม่ชัดเจน ไม่กระตุ้นให้นักเรียนแสดงเหตุผล ความคิดเห็นของตนเอง และการจัดลำดับแนวคิดที่ไม่เป็นลำดับ ไม่เห็นความแตกต่างระหว่างแนวคิด ผู้วิจัยจึงนำไปปรับปรุงในวงจรที่ 2 ต่อไป พร้อมทั้งมอบหมายใบงานตรวจสอบความเข้าใจท้ายคาบ สำหรับความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนในวงจรที่ 1 อยู่ในระดับปานกลาง (2) คิดเป็นร้อยละ 66.67

วงจรที่ 2 เรื่อง เส้นขนานและรูปสามเหลี่ยม ผู้วิจัยดำเนินการคล้ายวงจรที่ 1 แต่มีการจัดลำดับแนวคิดของนักเรียนจากการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตอย่างไม่เป็นทางการ ไปสู่ทางการ โดยสามารถดำเนินการพิสูจน์อย่างเป็นลำดับขั้นตอน และอ้างอิงสัจพจน์ ทฤษฎีบททางเรขาคณิตอย่างสมเหตุสมผล จากนั้นผู้วิจัยดำเนินการเชื่อมโยงแนวคิดในแต่ละแนวคิดของนักเรียน โดยใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียนแสดงเหตุผล ตัวอย่างเช่น “จากแนวคิดการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตมีความแตกต่างกันอย่างไร” และ “นักเรียนคิดว่าแนวคิดไหน ที่มีลำดับการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่ถูกต้อง ชัดเจน สมเหตุสมผลที่สุด เพราะเหตุใด” ทำให้ขั้นอภิปราย และเชื่อมโยงแนวคิดมีประเด็นในการอภิปรายร่วมกันภายในชั้นเรียนมากขึ้น แนวคิดส่วนใหญ่ที่เกิดขึ้น นักเรียนแสดงการอ้างอิงนิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบททางเรขาคณิตถูกต้อง แต่ยังไม่สามารถอธิบายเหตุผลที่ถูกต้อง และชัดเจนมากนัก เมื่อพิจารณาความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียน พบว่า อยู่ในระดับดี (3) คิดเป็นร้อยละ 57.14

วงจรที่ 3 เรื่อง การนำไปใช้ ผู้วิจัยดำเนินการคล้ายวงจรที่ 1 และ 2 แต่มีการเน้นการตรวจสอบแนวคิดของนักเรียนมากขึ้น พร้อมทั้งใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียนแสดงการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต โดยนำทฤษฎีบททางเรขาคณิตที่เป็นความรู้เดิมมาใช้อ้างอิงในการให้เหตุผลอย่างถูกต้อง ชัดเจน และกำชับให้ตรวจสอบความถูกต้องในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต ซึ่งในขั้นอภิปราย นักเรียนสามารถเชื่อมโยงเปรียบเทียบการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตจากที่ไม่เป็นทางการไปสู่การเขียนพิสูจน์ที่เป็นลำดับขั้นตอน และอ้างอิงสัจพจน์ ทฤษฎีบททางเรขาคณิตอย่างสมเหตุสมผล ถูกต้อง ชัดเจน ทำให้เกิดกระบวนการคิดด้วยตนเอง โดยความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียน พบว่า อยู่ในระดับดี (3) คิดเป็นร้อยละ 52.38 เมื่อสิ้นสุดการจัดการเรียนรู้ทั้ง 3 วงจรอย่างต่อเนื่อง ผู้วิจัยดำเนินการทดสอบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต เรื่อง เส้นขนาน ของนักเรียน

6) การวิเคราะห์ข้อมูล ผู้วิจัยวิเคราะห์ข้อมูลจากใบงานตรวจสอบความเข้าใจในแต่ละวงจร และแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตหลังการจัดการเรียนรู้ จากนั้นวิเคราะห์ผล

โดยการหาร้อยละ ผู้วิจัยใช้เกณฑ์การประเมินที่วัดระดับความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต แสดงดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 แสดงเกณฑ์วัดระดับความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

ระดับ	คำอธิบาย
ระดับ 0 (ปรับปรุง)	นักเรียนไม่สามารถแสดงการพิสูจน์ทางเรขาคณิตได้ หรือไม่ระบุข้อมูล
ระดับ 1 (พอใช้)	นักเรียนสามารถแสดงการพิสูจน์ทางเรขาคณิต จากการใช้เครื่องมือวัด หรือยกตัวอย่างบางส่วนของข้อมูลที่กำหนดให้ แต่ไม่สามารถดำเนินการพิสูจน์ เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปในการพิสูจน์ได้
ระดับ 2 (ปานกลาง)	นักเรียนสามารถแสดงการพิสูจน์ทางเรขาคณิต โดยอ้างอิง นิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบททางเรขาคณิตได้บางส่วน แต่ไม่สามารถดำเนินการพิสูจน์ เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปในการพิสูจน์ได้
ระดับ 3 (ดี)	นักเรียนสามารถแสดงการพิสูจน์ทางเรขาคณิต โดยอ้างอิง นิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบททางเรขาคณิตได้ถูกต้องส่วนใหญ่ และสามารถดำเนินการพิสูจน์อย่างเป็นลำดับขั้นตอนเป็นส่วนใหญ่ เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปในการพิสูจน์ได้
ระดับ 4 (ดีมาก)	นักเรียนสามารถแสดงการพิสูจน์ทางเรขาคณิต โดยอ้างอิง นิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบททางเรขาคณิตได้ถูกต้อง ชัดเจน และสามารถดำเนินการพิสูจน์อย่างเป็นลำดับขั้นตอน เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปในการพิสูจน์ได้

ผลการวิจัย

จากการส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยใช้ 5 แนวปฏิบัติการสอนในการออกแบบ และจัดกิจกรรมการเรียนรู้ทั้ง 3 วงจร และการทดสอบจากใบงานตรวจสอบความเข้าใจ และแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต พบว่า หลังการจัดการเรียนรู้มีนักเรียนมีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตตั้งแต่ระดับดีขึ้นไป (3 และ 4) ถึงร้อยละ 64.29 แสดงดังตารางที่ 2

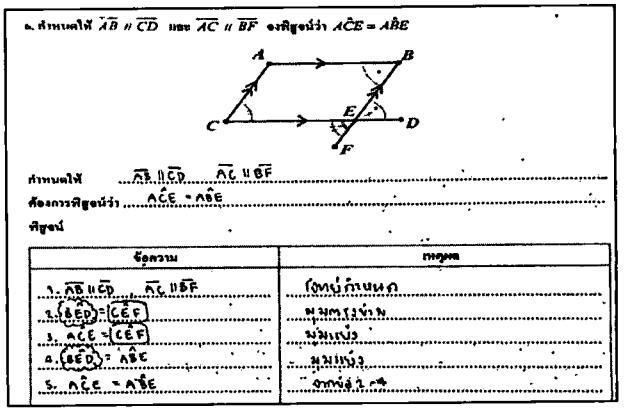
ตารางที่ 2 แสดง จำนวน และร้อยละของนักเรียนแต่ละระดับความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตในแต่ละวงจร และหลังการจัดการเรียนรู้ (N=42)

	วงจรที่ 1		วงจรที่ 2		วงจรที่ 3		หลังการจัดการเรียนรู้	
	จำนวน (คน)	คิดเป็นร้อยละ	จำนวน (คน)	คิดเป็นร้อยละ	จำนวน (คน)	คิดเป็นร้อยละ	จำนวน (คน)	คิดเป็นร้อยละ
ระดับ 0	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00
ระดับ 1	1	2.38	0	0.00	4	9.52	1	2.38
ระดับ 2	28	66.67	16	38.10	12	28.57	14	33.33
ระดับ 3	12	28.57	24	57.14	22	52.38	21	50
ระดับ 4	1	2.38	2	4.76	4	9.52	6	14.29

Journal of Graduate Studies Valaya Alongkorn Rajabhat University
Vol. 15 No. 2 (May - August 2021)

จากตารางที่ 2 เมื่อพิจารณาผลการประเมินความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนในแต่ละวงจรทั้ง 3 วงจร ปรากฏว่า วงจรที่ 1 นักเรียนส่วนใหญ่มีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตในระดับ 2 จำนวน 28 คน คิดเป็นร้อยละ 66.67 วงจรที่ 2 นักเรียนส่วนใหญ่มีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตในระดับ 3 จำนวน 24 คน คิดเป็นร้อยละ 57.14 วงจรที่ 3 นักเรียนส่วนใหญ่มีระดับความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตในระดับ 3 จำนวน 22 คน คิดเป็นร้อยละ 52.38 และหลังการจัดการเรียนรู้ นักเรียนส่วนใหญ่มีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตในระดับ 3 จำนวน 21 คน คิดเป็นร้อยละ 50 รองลงมาคือ ระดับ 2 จำนวน 14 คน คิดเป็นร้อยละ 33.33 ตามด้วยระดับ 4 จำนวน 6 คน และระดับ 1 จำนวน 1 คน ซึ่งคิดเป็นร้อยละ 14.29 และ 2.38 ตามลำดับ ส่วนระดับความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตในระดับ 0 ไม่มีนักเรียนอยู่ในระดับดังกล่าว นอกจากนี้ยังพบว่า หลังการจัดการเรียนรู้มีนักเรียนมีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตตั้งแต่ระดับดีขึ้นไป (3 และ 4) ถึงร้อยละ 64.29

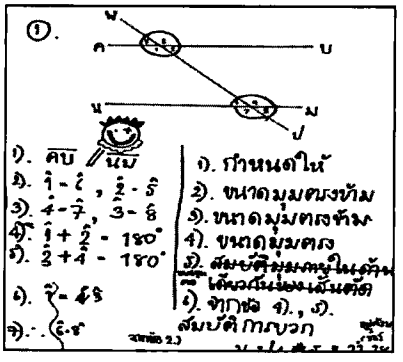
ผลการวิจัยดังกล่าว พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่มีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 3 แสดงให้เห็นว่า นักเรียนสามารถแสดงการพิสูจน์ทางเรขาคณิต โดยอ้างอิง นิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบททางเรขาคณิตได้ถูกต้องส่วนใหญ่ และสามารถดำเนินการพิสูจน์อย่างเป็นลำดับขั้นตอนเป็นส่วนใหญ่ เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปในการพิสูจน์ได้ ดังตัวอย่างความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตในระดับ 3 ของเด็กหญิงลิซ่า (นามสมมติ) จากแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ดังภาพที่ 2



ภาพที่ 2 แสดงตัวอย่างความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตในระดับ 3 ของเด็กหญิงลิซ่า

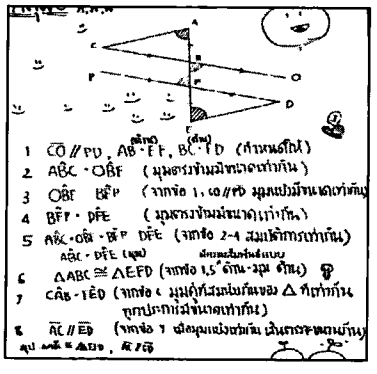
จากภาพที่ 2 แสดงให้เห็นว่า เด็กหญิงลิซ่าสามารถแสดงการพิสูจน์ทางเรขาคณิตโดยอ้างอิงทฤษฎีบทเกี่ยวกับเส้นขนานและมุมแย้งในการให้เหตุผลได้ถูกต้องเป็นส่วนใหญ่ นั่นคือ มุมแย้ง ซึ่งไม่ได้อธิบายว่า จากข้อ 1. มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน นอกจากนี้ ยังไม่ได้อ้างสมบัติการเท่ากันในการให้เหตุผลในข้อสรุป แต่ยังสามารถดำเนินการพิสูจน์อย่างเป็นลำดับขั้นตอน เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปในการพิสูจน์ได้ ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า เด็กหญิงลิซ่ามีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตอยู่ในระดับ 3

นอกจากนี้ จากผลการวิจัย พบว่าในวงจรที่ 1 นักเรียนมีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตในระดับปานกลาง (2) และระดับดี (3) ในวงจรที่ 2 และ 3 แสดงให้เห็นว่า นักเรียนมีพัฒนาการของความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้น ดังตัวอย่างงานทางคณิตศาสตร์, ที่เน้นการพิสูจน์ทางเรขาคณิตในวงจรที่ 1 ดังภาพที่ 3 และวงจรที่ 3 ดังภาพที่ 4 ตามลำดับ



ภาพที่ 3 แสดงตัวอย่างความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตในระดับปานกลาง (2) ในวงจรที่ 1

จากภาพที่ 3 จะเห็นว่า นักเรียนสามารถแสดงการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต โดยอ้างอิงสัจพจน์ได้บางส่วน นั่นคือ ขนาดของมุมตรงข้าม และขนาดของมุมตรง ซึ่งไม่ได้อธิบายว่า มุมตรงข้ามหรือมุมตรงมีขนาดเท่ากัน และไม่สามารถดำเนินการพิสูจน์ เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปในการพิสูจน์ได้ ซึ่งเป็นแนวคิดที่แสดงถึงความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตในระดับปานกลาง (2)



ภาพที่ 4 แสดงตัวอย่างความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตในระดับดีมาก (4) ในวงจรที่ 3

จากภาพที่ 4 จะเห็นว่า นักเรียนสามารถแสดงการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต โดยอ้างอิงความรู้เดิมที่เกี่ยวกับสัจพจน์ และทฤษฎีบททางเรขาคณิตได้ ซึ่งถือว่ามีความถูกต้อง และชัดเจน พร้อมทั้งสามารถดำเนินการพิสูจน์อย่างเป็นลำดับขั้นตอน เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปในการพิสูจน์ได้ ดังนั้นงานทางคณิตศาสตร์ชิ้นนี้จึงประเมินความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตในระดับดี (4)

อภิปรายผล

จากผลการวิจัยข้างต้น พบว่า นักเรียนส่วนใหญ่ร้อยละ 64.29 มีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตอยู่ในระดับดีขึ้นไป ซึ่งอาจเกิดจากปัจจัยดังต่อไปนี้

1. การออกแบบและจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ 5 แนวปฏิบัติการสอน ซึ่งผู้วิจัยได้เริ่มจากการออกแบบงานทางคณิตศาสตร์ที่เปิดโอกาสให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ทำให้นักเรียนแสดงเหตุผลในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตอย่างเต็มที่และสมเหตุสมผล สอดคล้องกับ Martin et al. (2005) ได้กล่าวว่า การจัดการเรียนรู้ที่ให้นักเรียนแสดงแนวคิดผ่านงานทางคณิตศาสตร์ที่เปิดโอกาสให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการให้เหตุผลในการพิสูจน์สถานการณ์ปัญหานั้น ช่วยพัฒนาให้นักเรียนมีความสามารถในการพิสูจน์ที่เป็นอย่างทางการ และสมเหตุสมผล จากนั้น ผู้วิจัยคาดการณ์แนวคิดที่เป็นไปได้ทั้งหมดของนักเรียนที่ตอบสนองต่องานทางคณิตศาสตร์ ส่งผลให้ผู้วิจัยสามารถเตรียมการแก้ไขปัญหาที่เกิดขึ้นในชั้นเรียนได้ และจัดกิจกรรมการเรียนรู้อย่างมีประสิทธิภาพ สอดคล้องกับ Smith, Hughes, Engle, and Stein (2009) ได้กล่าวว่า การคาดการณ์แนวคิดของนักเรียน ทำให้ครูได้เรียนรู้แนวคิดที่นักเรียนตอบสนองต่องานทางคณิตศาสตร์ และช่วยให้ครูพิจารณาได้อย่างรอบคอบว่า ควรดำเนินการอย่างไร เมื่อนักเรียนมีการตอบสนองต่องานทางคณิตศาสตร์ที่แตกต่างออกไป หลังจากนั้น ผู้วิจัยมอบหมายงานทางคณิตศาสตร์ให้นักเรียน และเดินติดตามตรวจสอบแนวคิดที่เกิดขึ้นในชั้นเรียน ซึ่งผู้วิจัยตรวจสอบ และใช้คำถาม เพื่อกระตุ้นกระบวนการคิด และเปิดโอกาสให้นักเรียนปรับปรุงแก้ไขแนวคิดเกี่ยวกับกระบวนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตให้ดีขึ้น สอดคล้องกับ Engle and Conant (2002) ได้กล่าวว่า การติดตามตรวจสอบ นอกจากการเดินสำรวจแล้ว ยังกระตุ้นแนวคิดของนักเรียน ผ่านการใช้คำถามของผู้สอน เพื่อเปิดโอกาสให้นักเรียนสามารถทบทวน และแก้ไขกระบวนการคิดของตน ต่อมาผู้วิจัยดำเนินการเลือก และจัดลำดับแนวคิดที่แตกต่างกันอย่างมีเป้าหมาย ทำให้นักเรียนได้เห็นความแตกต่างระหว่างแนวคิด จากแนวคิดการพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่ไม่เป็นทางการ ไปสู่แนวคิดที่เป็นทางการ และสมเหตุสมผล สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้ของบทเรียน ส่งผลให้นักเรียนเปรียบเทียบ และวิเคราะห์แนวคิดที่แตกต่างกันเหล่านั้น สอดคล้องกับ Weikle and Murray (2014) ได้กล่าวว่า การเลือก และจัดลำดับแนวคิดที่แตกต่างและเหมาะสม ทำให้นักเรียนมองเห็นแนวคิดที่แตกต่างกันของตนเอง และแนวคิดของเพื่อน ช่วยกระตุ้นให้นักเรียนเกิดกระบวนการคิด และพัฒนาความเข้าใจต่องานทางคณิตศาสตร์ได้มากขึ้น หลังจากนั้น ผู้วิจัยเชื่อมโยงแนวคิดที่แตกต่างกันของนักเรียนที่ได้จัดลำดับไว้ผ่านการอภิปรายร่วมกันในชั้นเรียน ส่งผลให้นักเรียนสามารถเปรียบเทียบแนวคิดของตน และแนวคิดของเพื่อน เพื่อสรุปแนวคิดทางคณิตศาสตร์ด้วยตนเอง สอดคล้องกับ Richland, Begolli, Simms, Frausel, and Lyons (2017) ได้กล่าวว่า การอภิปรายเชื่อมโยงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่เปิดโอกาสให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการให้เหตุผล ทำให้นักเรียนสามารถเปรียบเทียบแนวคิดที่แตกต่างกันได้ ช่วยให้นักเรียนเลือกแนวคิดที่ถูกต้อง สมเหตุสมผล และสรุปองค์ความรู้ด้วยตนเองได้

2. การดำเนินการวิจัยนี้ผ่านกระบวนการปฏิบัติการในชั้นเรียนตั้งแต่วงจรที่ 1 ถึงวงจรที่ 3 ซึ่งเปิดโอกาสให้ผู้วิจัยได้ปรับปรุงการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้เหมาะสมกับนักเรียนอย่างต่อเนื่อง ส่งผลให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้อย่างมีประสิทธิภาพ และพัฒนาการเรียนรู้อย่างต่อเนื่อง รวมทั้งช่วย

ให้ครูได้ปรับปรุงแก้ไขพัฒนาการเรียนรู้ของนักเรียนไปพร้อม ๆ กับการจัดการเรียนรู้ (Wongwanich, 2016) จึงส่งผลให้นักเรียนมีพัฒนาการในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตเพิ่มขึ้น

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะสำหรับผู้ที่จะนำผลการวิจัยไปใช้

1.1 ก่อนนำผลการวิจัยไปใช้ ผู้สอนควรวิเคราะห์บริบทและระดับการรู้คิดของนักเรียน เพื่อให้ผลการนำไปใช้มีประโยชน์ในชั้นเรียน

1.2 ผู้สอนควรปรับแนวคำถามตามแนวคิดของนักเรียนที่เกิดขึ้นจริงในชั้นเรียน เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนแสดงเหตุผล และเปรียบเทียบแนวคิดที่แตกต่างกันนั้น

2. ข้อเสนอแนะในการทำวิจัยครั้งต่อไป

2.1 ควรนำการวิจัยโดยใช้ 5 แนวปฏิบัติการสอนไปปฏิบัติการวิจัยในเนื้อหาอื่น ๆ หรือในระดับชั้นอื่น ๆ เพื่อพัฒนาแนวทางในการจัดการเรียนรู้ต่อไป

2.2 ควรนำการวิจัยโดยใช้ 5 แนวปฏิบัติการสอนไปปฏิบัติในการส่งเสริมทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในด้านอื่น ๆ เช่น ความคิดสร้างสรรค์ การคิดอย่างมีวิจารณญาณ การคิดเชิงสถิติ การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เป็นต้น

References

Brikshavana, T. (2017). kān̄suksā̄ khwām̄sām̄āt̄ læ panhā̄ nai kān̄ phisūt̄ thāng khanittasāt̄ khon̄g naksuksā̄ laksūt̄ suksā̄ sāttra bandit sākhā̄ wichā̄ khanittasāt̄ mahāwitthayālai suān Dusit [A Study of Ability and the Problems in Mathematical Proof of Educational Bachelor Degree Students, Mathematical Program, Suan Dusit University]. **Journal of Multidisciplinary in Social Sciences**, 13(2), 167-184.

Chaiyawong, T., & Kamol, N. (2018). kān̄ songsœ̄m khwām̄sām̄āt̄ nai kān̄ kǣ panhā̄ thāng khanittasāt̄ khon̄g nakrīan chan matthayommasuksā̄ pī thī̄ so̱ng doī chai hā̄ nǣo patibatkān̄ so̱n [Promoting Mathematical Problem Solving Abilities of Grade 8 Students Using the Five Practices]. **Proceeding of the 23rd Annual Meeting in Mathematics: AMM 2018 "Mathematical Science for Thailand 4.0"** 3 – 5 May 2018. Mandarin Hotel Bangkok: 337–343.

Engle, R. A., & Conant, F. R. (2002). Guiding principles for fostering productive disciplinary engagement: Explaining an emergent argument in a community of learners classroom. **Cognition and Instruction**, 20(4), 399-483.

Goldberger, A. (2002). **What are mathematical proofs and why they are important?** Math 216 class, University of Connecticut.

Gutierrez, A., Pegg, J., & Lawrie, C. (2004). Characterization of Students' Reasoning and Proof Abilities in 3-Dimensional Geometry. **International Group for the Psychology of Mathematics Education.**

Hanna, G. (2000). Proof, explanation, and exploration: An overview. **Educational studies in mathematics**, 44(1-2), 5-23.

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. **Journal for research in mathematics education**, 524-549.

Kemmis, S. and McTaggart, R. (1990). **The Action Research Planner**. Geelong: Deakin University Press.

Makanong, A. (2015). **khrū khanittasāt samrap matthayommasuksā** [Mathematics Teacher for Secondary School]. 2nd ed. Bangkok: Chulalongkorn University.

Martin, T. S., McCrone, S. M. S., Bower, M. L. W., & Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof. **Educational Studies in Mathematics**, 60(1), 95-124.

Moothummachai, N., & Kamol, N. (2017). rūpbæp kānchai ngān thāng khanittasāt thī songsoēm khwāmsāmāt nai kānhai hētphon thāng khanittasāt rūang khwāmsamphan læ fangchan khǫng nakrīan chan matthayommasuksā pī thī sī [Using Mathematical Tasks Forms that Promoting Mathematical Reasoning Abilities in The Relationship and Function of Grade 10 Students]. **Proceeding of the 22nd Annual Meeting in Mathematics: AMM 2017 "Mathematics Research and National Research Strategy"** 2 – 4 June 2017. Lotus Pang Suan Kaew Hotel Chiang Mai.

Richland, L. E., Begolli, K. N., Simms, N., Frausel, R. R., & Lyons, E. A. (2017). Supporting mathematical discussions: The roles of comparison and cognitive load. **Educational Psychology Review**, 29(1), 41-53.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (2011). **Five practices for orchestrating productive mathematics discussions**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Smith, M. S., Hughes, E. K., Engle, R. A., & Stein, M. K. (2009). Orchestrating discussions. **Mathematics Teaching in the Middle School**, 14(9): 548-556.

The Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology. (2012). **thaksa / krabuānkān thāng khanittasāt** [Skills/Mathematical Process]. 3rd ed. Bangkok: Kurusapa Printing Ladphrao.

The Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology. (2019). **khūmư̄ kān̄chai laksūt klum sāra kān̄rīanrū khanittasāt** [Manual for curriculum in mathematics]. Retrieved from https://www.scimath.org/ebook-mathematics/item/8380-2560-2551-8380

Weikle, D. A., & Murray, M. (2014). Improving CS class discussions using the 5 practices. **Journal of Computing Sciences in Colleges,** 29(3), 65-71.

Wongwanich, S. (2016). **kān̄wic̆hai patibatkān̄ nai chan rīan** [Classroom Action Research]. 18th ed. Bangkok: Chulalongkorn University.