การใช้รูปแบบ Van Hiele ในการพัฒนาการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

Using Van Hiele model to develop instruction in geometric proof for mathayomsuksa three students

อลงกรณ์ ตั้งสงวนธรรม[a,*], สิริพร ทิพย์คง[b], ชานนท์ จันทรา[b] และ ชนิศวรา เลิศอมรพงษ์[b]

Alongkorn Tangsa-nguantham [a,*], Siriporn Thipkong[b], Chanon Chuntra[b], and Chanisawara Lertamornpong[b]

[a] หลักสูตรศึกษาศาสตรดุษฎีบัณฑิต สาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ กรุงเทพมหานคร 10900
Doctoral Program in Teaching Mathematics, Faculty of Education, Kasetsart University, Bangkok 10900, Thailand

[b] ภาควิชาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ กรุงเทพมหานคร 10900
Department of Education, Faculty of Education. Kasetsart University, Bangkok 10900, Thailand

ARTICLE INFO

Article history:
Received 21 December 2016
Received in revised form 31 March 2017
Accepted 4 April 2017

Keywords:
geometric proof,
instructional model,
Van Hiele level

ABSTRACT

The development in Van Hiele levels of thinking was investigated to study mathematical learning achievement, and the geometric proof ability of mathayomsuksa three students. Purposive sampling was used to select the samples-44 mathayomsuksa three students at Ratchananthachan Samsenwittayalai 2 School, Bangkok in the second semester of the 2015 academic year and 60 mathayomsuksa three students at Surasakmontree School, Bangkok in the first semester of the 2016 academic year. The research instruments were lesson plans, mathematical learning achievement tests with a reliability score of .82, geometric proof ability tests, Van Hiele levels of thinking test, and record forms after using learning management. The results revealed that: 1) mathayomsuksa three students had development in Van Hiele level 3 of thinking at more than 60 percent (68.33%); 2) mathayomsuksa three students had mathematical learning achievement on reasoning about triangles and quadrilaterals at more than 60 percent of criteria (69.50%); 3) and mathayomsuksa three students had geometric proof ability after using the instructional model in geometric proof at more than 60 percent of criteria (68.68%).

* Corresponding author.
E-mail address: atangirl@gmail.com

บทคัดย่อ

วัตถุประสงค์ของการวิจัยครั้งนี้ 1) ศึกษาพัฒนาการในระดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele 2) ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ และ 3) ศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนราชนันทาจารย์ สามเสนวิทยาลัย 2 กรุงเทพมหานคร ที่ศึกษาอยู่ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2558 จำนวน 44 คน และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสุรศักดิ์มนตรี กรุงเทพมหานคร ที่ศึกษาอยู่ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2559 จำนวน 60 คน ซึ่งได้มาจากการเลือกแบบเจาะจง เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย คือ แผนการจัดการเรียนรู้ แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ซึ่งมีค่าความเที่ยง 0.82 แบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต แบบวัดระดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele และแบบบันทึกหลังการจัดการเรียนรู้ ผลการวิจัยปรากฏว่า 1) นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีพัฒนาการในระดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele อยู่ในระดับ 3 มากกว่า 60 เปอร์เซ็นต์ โดยมีจำนวนนักเรียนคิดเป็น ร้อยละ 68.33 2) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่องการให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม หลังการเรียนสูงกว่าเกณฑ์ 60 เปอร์เซ็นต์ โดยมีคะแนนคิดเป็นร้อยละ 69.50 3) นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต หลังการใช้รูปแบบการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต สูงกว่าเกณฑ์ 60 เปอร์เซ็นต์ โดยมีคะแนนคิดเป็นร้อยละ 68.68

คำสำคัญ: การพิสูจน์ทางเรขาคณิต รูปแบบการเรียนการสอนระดับขั้นของ Van Hiele

บทนำ

หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ได้ระบุการให้เหตุผล ตลอดจนการพิสูจน์ เป็นหนึ่งในทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ โดยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2555ก) ได้กล่าวว่า การให้เหตุผลเป็นทักษะและกระบวนการที่ส่งเสริมให้นักเรียนรู้จักคิดอย่างมีเหตุผล คิดอย่างเป็นระบบ สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ สามารถคาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ และแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องเหมาะสม การคิดอย่างมีเหตุผลเป็นเครื่องมือสำคัญที่นักเรียนสามารถนำติดตัวไปใช้ในการพัฒนาตนเองในการเรียนรู้สิ่งใหม่ๆ ในการทำงานและการดำรงชีวิต ดังนั้น การคิดอย่างมีเหตุผลจึงเป็นหัวใจสำคัญของการสอนคณิตศาสตร์ นอกจากนี้ยังมีงานวิจัยเป็นจำนวนมากที่ยืนยันว่า การสอนให้นักเรียนเรียนด้วยความเข้าใจอย่างมีเหตุผล ดีกว่าการสอนแบบให้จดจำ การสอนคณิตศาสตร์อย่างเป็นเหตุเป็นผลจะทำให้นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ สามารถจดจำได้ดีและนานกว่าเดิม

นอกจากนี้ National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) ได้ระบุว่าการให้เหตุผลและการพิสูจน์ควรเป็นส่วนหนึ่งในประสบการณ์การเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนตั้งแต่ระดับปฐมวัย (Prekindergarten) จนถึงชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 (grade 12) ซึ่งในการจัดการเรียนการสอน นักเรียนต้องมีความสามารถดังนี้ เห็นคุณค่าของการให้เหตุผลและการพิสูจน์เช่นเดียวกับพื้นฐานที่คาดหวังของคณิตศาสตร์ สร้างและสืบเสาะข้อความทางคณิตศาสตร์ พัฒนาและประเมินการอ้างเหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เลือกและใช้รูปแบบการให้เหตุผลและวิธีการพิสูจน์ได้อย่างหลากหลาย การที่ NCTM หรือ สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา ได้กำหนดการให้เหตุผลและการพิสูจน์ไว้ในหนังสือหลักและมาตรฐานสำหรับคณิตศาสตร์ในโรงเรียน และสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้ระบุไว้ในหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 สาระที่ 6 การให้เหตุผลและการพิสูจน์เป็นด้านหนึ่งในทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ เนื่องด้วยการพิสูจน์เป็นสิ่งจำเป็นสำหรับคณิตศาสตร์ เพราะการพิสูจน์จะแสดงให้เห็นถึงเหตุผลที่จะยืนยันว่าความรู้ทางคณิตศาสตร์นั้นจริงหรือไม่ ขณะที่ทักษะการให้เหตุผลและการเรียบเรียงเหตุผลเป็นสิ่งที่จำเป็นในการพิสูจน์ อีกทั้งเป็นการเพิ่มพูนทักษะการคิดวิเคราะห์รวมทั้งทำให้เกิดข้อค้นพบเกี่ยวกับความจริงทางคณิตศาสตร์ มีวิธีการพิสูจน์หลายวิธีที่นำไปสู่ข้อสรุปทางคณิตศาสตร์ การพิสูจน์เหมือนเกมฝึกสมองที่สามารถทำให้สนุกและได้พบความจริง (Donna, 2012) แต่ในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตมักพบปัญหาว่า นักเรียนไม่สามารถเริ่มต้นการพิสูจน์ได้ ตั้งแต่ไม่สามารถสร้างรูปเรขาคณิตตามเงื่อนไขของโจทย์ ไม่ทราบว่าโจทย์ต้องการอะไร และไม่สามารถนำความรู้ที่เรียนมาแล้วมาใช้ได้ ดังนั้น ครูควรใช้คำถามให้นักเรียนวิเคราะห์ย้อนกลับจากสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ไปสู่สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และ

เทคโนโลยี, 2555ข) ซึ่งสอดคล้องกับ Golzy (2008) ที่ได้กล่าวว่า การพิสูจน์เป็นสิ่งสำคัญในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ แต่ก็เป็นเรื่องยากที่จะสอนนักเรียนและมักมีปัญหาในการเริ่มต้นการพิสูจน์ และ Lee (2011) ได้กล่าวว่า นักเรียนมีความยากลำบากในการให้เหตุผลที่มีความหมายเชิงตรรกะ และการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ส่วน Bieda (2010) ได้กล่าวไว้ในบทความวิจัยว่า การอภิปรายเกี่ยวกับวิชาคณิตศาสตร์ในโรงเรียน บ่อยครั้งที่มีการพูดถึงความสำคัญของการให้เหตุผลและการพิสูจน์ เพื่อเป็นการสร้างความรู้ความเข้าใจของนักเรียนด้านคณิตศาสตร์ แต่ถึงอย่างไรก็ตาม ยังมีงานวิจัยจำนวนน้อยที่ตรวจสอบว่าครูออกแบบงานให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติอย่างไร เพื่อส่งเสริมนักเรียนในการแสดงเหตุผลและพิสูจน์ในชั้นเรียน แม้ว่าจะมีงานเขียนอยู่มากมายเรื่องความสามารถของนักเรียนในการสร้างและทำความเข้าใจเกี่ยวกับการตรวจสอบความถูกต้อง แต่ก็ยังมีความรู้น้อยมากเกี่ยวกับการใช้ความรู้ความชำนาญอย่างไรในการแสดงเหตุผลและการพิสูจน์ในการสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียน

จากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ทำให้ผู้วิจัยทราบว่าการเรียนการสอนเกี่ยวกับการให้เหตุผลและการพิสูจน์ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งในทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ยังเป็นปัญหาสำหรับนักเรียน ฉะนั้นการที่จะพัฒนานักเรียนในด้านนี้ จำเป็นต้องพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนอย่างเป็นระบบ และต่อเนื่องบนพื้นฐานของทฤษฎีการเรียนรู้ หลักการแนวคิดการจัดการเรียนการสอน ซึ่งระบบการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยใช้เป็นแนวทางในการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนนั้นจะมีความเกี่ยวเนื่องสัมพันธ์กัน โดยเริ่มจากการวิเคราะห์ การออกแบบ การพัฒนา การนำไปใช้ และการประเมินผล

เนื่องจากการเรียนการสอนเป็นทั้งศาสตร์และศิลป์ การที่นักเรียนจะเข้าใจเนื้อหาสาระที่ครูสอนหรือไม่ ขึ้นอยู่กับการออกแบบการเรียนการสอนของครู ฉะนั้นไม่ว่ากาลเวลาจะเปลี่ยนแปลงไปอย่างไร ครูยังคงเป็นผู้ที่ต้องประสิทธิ์ประสาทความรู้ให้กับนักเรียน แต่วิธีการและเทคนิคจะแตกต่างกันไปตามเนื้อหา ที่จะสอน และเพื่อให้การเรียนการสอนเรขาคณิตโดยเฉพาะอย่างยิ่งการให้เหตุผลและการพิสูจน์ซึ่งเป็นสิ่งที่ยากสำหรับนักเรียนมาทุกยุคทุกสมัย มีความน่าสนใจ น่าติดตาม น่าตื่นเต้น ท้าทาย และง่ายต่อการเรียนรู้ ผู้วิจัยจึงพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เพื่อให้นักเรียนสามารถให้เหตุผลในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตได้อย่างถูกต้อง และสามารถนำความรู้ไปใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างมีประสิทธิภาพ

วัตถุประสงค์

1. ศึกษาพัฒนาการในระดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3
2. ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3
3. ศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

การตรวจเอกสาร

ระดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele

รูปแบบของ Van Hiele ประกอบด้วยระดับขั้นการคิดจากง่ายไปยากหรือสลับซับซ้อนมากขึ้น ดังรายละเอียดต่อไปนี้ (สิริพร, 2532)

ขั้น 0 หรือขั้นพื้นฐาน : การมองเห็น (Visualization) นักเรียนสามารถบอกชื่อรูปภาพที่มองเห็น เช่น รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส แต่ในขั้นนี้นักเรียนไม่สามารถบอกคุณลักษณะส่วนย่อยได้

ขั้น 1 : การวิเคราะห์ (Analysis) นักเรียนสามารถวิเคราะห์ความคิดรวบยอดเกี่ยวกับรูปเรขาคณิตสองมิติได้ชัดเจนมากขึ้นกว่าขั้นพื้นฐาน สามารถบอกสมบัติของรูปเรขาคณิตสองมิติ เช่น รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากันและมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก

ขั้น 2 : การพิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผน (Informal Deduction) นักเรียนสามารถบอกรายละเอียดปลีกย่อย เกี่ยวกับสมบัติของรูปต่างๆ ทางเรขาคณิต สามารถเปรียบเทียบและบอกความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกันได้ เช่น รูปสี่เหลี่ยมใดๆ ถ้าด้านตรงข้ามขนานกันและยาวเท่ากันแล้วมุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมนั้นจะต้องเท่ากัน รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสคือรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน เป็นต้น ถึงแม้ว่านักเรียนจะยังไม่สามารถพิสูจน์ได้ ในขั้นนี้นักเรียนสามารถเข้าใจคำจำกัดความต่างๆ มีการอภิปรายให้เหตุผลอย่างไม่เป็นแบบแผน ในบางครั้งนักเรียนอาจจะตอบว่า "เข้าใจ แต่อธิบายไม่ได้"

ขั้น 3 : การพิสูจน์อย่างมีแบบแผน (Formal Deduction) นักเรียนสามารถเข้าใจการพิสูจน์ที่มีกฎเกณฑ์ คุ้นเคยกับการพิสูจน์ และสามารถพิสูจน์ได้ โดยทราบว่าอะไรคือสิ่งที่กำหนดให้ และอะไรคือสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ นักเรียนรู้จักตั้งกฎเกณฑ์และข้อโต้แย้งในการคิดไปตามลำดับเหตุผล ทราบว่าทำไมสิ่งที่กำลังพิสูจน์อยู่เป็นจริงและเป็นไปได้อย่างไร นักเรียนอาจจะพิสูจน์สิ่งที่ต้องการจะพิสูจน์นั้นได้มากกว่าหนึ่งวิธี

ขั้น 4 : การคิดขั้นสุดยอด (Rigor) นักเรียนสามารถคิดอย่างนามธรรม สามารถเปรียบเทียบระบบต่างๆ เช่น การเปรียบเทียบสัจพจน์ (Axiom) ทฤษฎี (Theory) และเรขาคณิตนอกระบบยุคลิด (Non-Euclidean Geometry) นักเรียนสามารถจัดทฤษฎีต่างๆ เข้าเป็นระบบระเบียบ และสร้างทฤษฎีใหม่ๆ ทางเรขาคณิต คำถาม ที่อาจจะใช้ถามนักเรียน ได้แก่ อะไรจะเกิดขึ้นในการเรียนวิชาเรขาคณิต ถ้าไม่มีทฤษฎีเกี่ยวกับเส้นขนานคู่หนึ่งและมีเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งตัดขวาง

การพิสูจน์ทางเรขาคณิต

การให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางเรขาคณิต มีความสำคัญต่อการหาข้อสรุปที่เป็นเหตุเป็นผล และอิงตามหลักการทางคณิตศาสตร์ ผู้สอนควรฝึกให้ผู้เรียนพิสูจน์อย่างไม่เป็นทางการ (Informal proof) ก่อน เพื่อให้ผู้เรียนคุ้นเคยกับการคิดลักษณะต่างๆ เช่น การคิดวิเคราะห์ การคิดเชิงตรรกะ จากนั้นจึงค่อยฝึกการพิสูจน์อย่างเป็นทางการ (Formal proof) ที่ต้องมีการใช้ทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม และสมบัติทางเรขาคณิตมาประกอบอย่างสมเหตุสมผล การให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางเรขาคณิตอาจเริ่มจากการใช้ปัญหาทางเรขาคณิตที่ไม่ซับซ้อน มีขั้นตอนการคิดและการหาคำตอบที่ไม่ยุ่งยาก ไปจนถึงปัญหาที่ต้องการการเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ กระบวนการในการให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางเรขาคณิตจะช่วยให้ผู้เรียนเห็นว่าความรู้คณิตศาสตร์มีระบบ ระเบียบ แบบแผน เป็นจริง สมเหตุสมผล และสามารถพิสูจน์ได้ (อัมพร, 2557)

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2557) ได้กล่าวว่า การพิสูจน์เป็นขั้นตอนสำคัญขั้นตอนหนึ่งสำหรับการค้นคว้าทางคณิตศาสตร์ อย่างไรก็ตามมีข้อสังเกตว่าการพิสูจน์เชิงคณิตศาสตร์ มีข้อแตกต่างกับการพิสูจน์ในทางวิทยาศาสตร์อยู่บ้าง กล่าวคือในทางคณิตศาสตร์ การพิสูจน์คือการแสดง (ชี้แจง อธิบาย) ให้เห็นว่าจริงด้วยเหตุผลเชิงตรรกศาสตร์ (การให้เหตุผลแบบนิรนัย) ในขณะที่การพิสูจน์ทางวิทยาศาสตร์ทำได้โดยการทดลอง หรือการสังเกตปรากฏการณ์ (การให้เหตุผลแบบอุปนัย) ซึ่งอาศัยผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นซ้ำๆ กันหลายๆ ครั้ง นำไปสู่ข้อสรุปที่เป็นนัยทั่วไป สิ่งที่ต้องการการพิสูจน์ ได้แก่ ทฤษฎีบท ซึ่งคือประพจน์ที่เป็นจริง และไม่ใช่สัจพจน์ หรือบทนิยาม ในการนำเสนอองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ไม่ว่าจะเป็นในรูปของบทความในวารสารเชิงวิชาการ ตำรา หรือการเรียนการสอน จะพบเสมอว่าจะต้องมีการดำเนินการพิสูจน์ข้อความต่างๆ ที่กล่าวอ้าง แต่ในฐานะผู้เรียน หรือผู้นำองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปใช้มักมีข้ออ้างว่า ไม่เห็นจำเป็นต้องทราบวิธีการพิสูจน์ หรือเข้าใจบทพิสูจน์ เพราะองค์ความรู้ที่ต้องการเรียนรู้ หรือนำไปใช้นั้นเป็นองค์ความรู้ที่เป็นมาตรฐาน ได้รับการยอมรับ และตรวจสอบโดยนักคณิตศาสตร์มาแล้วว่าเป็นจริง

จากที่กล่าวมาจะสรุปความหมายของการพิสูจน์ได้ว่า การพิสูจน์ คือ การแสดงให้เห็นว่าข้อความที่กำลังพิสูจน์อยู่นั้นเป็นจริง โดยการเชื่อมโยงจากเหตุ (สิ่งที่ทราบว่าเป็นจริง) ไปสู่ผล (ข้อสรุป ที่ต้องการพิสูจน์ หรือต้องการนำไปกล่าวอ้างต่อไป) ผ่านการอ้างที่สมเหตุสมผล ดังนั้นสรุปได้ว่า การพิสูจน์เป็นเรื่องที่มีความจำเป็นต่อทุกคนทั้งในเรื่องของการเรียนการสอนในโรงเรียน และเรื่องที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวัน และนี่เป็นเหตุผลว่าทำไมจึงต้องมีการส่งเสริมความสามารถของนักเรียนทางด้านการให้เหตุผลและการพิสูจน์

สำหรับวิธีการสอนพิสูจน์เรขาคณิตนั้น ยุพิน (2545) ได้ให้แนวทางในการสอนพิสูจน์เรขาคณิต ไว้ดังนี้

1. การสอนทฤษฎีบท มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1.1 หาวิธีการให้ผู้เรียนสรุปเนื้อหาทฤษฎีบทด้วยตนเอง ซึ่งอาจจะใช้การสาธิตของครู การทดลอง การใช้เหตุผล การใช้สื่อการเรียนการสอนสำเร็จรูป แล้วให้ผู้เรียนรู้จักแยกแยะเหตุและผล

1.2 ให้ผู้เรียนบอกสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องพิสูจน์

1.3 เลือกวิธีการพิสูจน์ โดยมากใช้การวิเคราะห์จากผลไปสู่เหตุ แล้วเรียบเรียงจากเหตุไปสู่ผล แต่บางข้ออาจจะใช้การสังเคราะห์ หรือบางข้ออาจจะใช้การวิเคราะห์และสังเคราะห์ร่วมกัน ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับโจทย์

2. การพิสูจน์แบบฝึกหัด

2.1ให้ผู้เรียนอ่านโจทย์ให้เข้าใจ แยกเหตุและผล หรือแยกสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ ถ้าผู้เรียนไม่เข้าใจและไม่สามารถแยกได้ จะต้องพยายามให้ฝึกจนกว่าจะแยกได้

2.2 เขียนรูปประกอบ

2.3 การพิสูจน์ จะเลือกวิธีวิเคราะห์ หรือสังเคราะห์ หรือใช้การวิเคราะห์ร่วมกับสังเคราะห์จะต้องพิจารณาให้เหมาะสมกับเนื้อหา

3. การสอนบทสร้าง

3.1 ผู้สอนใช้คำถามและแสดงการสร้างตามลำดับ ผู้เรียนก็สร้างตาม ผู้สอนจะเขียนกระดานดำ แสดงวิธีสร้างทีละขั้นตอนไปพร้อมๆ กัน อย่าสอนจนจบแล้วถามผู้เรียนอีกว่าสร้างอย่างไรหรือถ้าเป็นเรื่องง่ายก็ให้ผู้เรียนแบ่งกลุ่มศึกษาสาระในหนังสือเรียน

3.2 การพิสูจน์จะใช้วิธีการวิเคราะห์หรือสังเคราะห์อยู่ในดุลยพินิจของผู้สอน แล้วช่วยกันสร้าง ผู้สอนตรวจสอบความถูกต้อง

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยและพัฒนา (Research and Development หรือ R&D) เพื่อพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งผู้วิจัยแบ่งการวิจัยเป็น 4 ระยะ ดังนี้

ระยะที่ 1 ศึกษา วิเคราะห์ และสังเคราะห์ข้อมูลพื้นฐานเพื่อหาแนวทางในการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนที่ช่วยส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 (R1)

ระยะที่ 2 สร้าง และพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต และเครื่องมือการวิจัย (D1)

ระยะที่ 3 นำไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ครั้งที่ 1 (R2) และแก้ไขปรับปรุงรูปแบบการเรียนการสอน (D2) และนำไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ครั้งที่ 2 (R3)

ระยะที่ 4 ประเมินผล และแก้ไขปรับปรุงรูปแบบการเรียนการสอน (D3) เพื่อให้ได้รูปแบบการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ฉบับสมบูรณ์ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

การเก็บรวบรวมข้อมูลเพื่อการวิจัยในครั้งนี้ประกอบด้วยเครื่องมือ 5 ชนิด ได้แก่ แผนการจัดการเรียนรู้ แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ แบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตแบบวัดระดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele และแบบบันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

การเก็บรวบรวมข้อมูล

ผู้วิจัยได้ดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูล 2 ครั้ง กับนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่ได้มาจากการเลือกแบบเจาะจง 2 โรงเรียน คือ นักเรียนโรงเรียนราชนันทาจารย์ สามเสนวิทยาลัย 2 สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 1 จำนวน 44 คน ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2558 เดือนมกราคมถึงกุมภาพันธ์ 2559 และโรงเรียนสุรศักดิ์มนตรี สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 2 จำนวน 60 คน (2 ห้องเรียน ห้องเรียนละ 30 คน) ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2559 เดือนมิถุนายนถึงเดือนกรกฎาคม 2559 ซึ่งผู้วิจัยได้ดำเนินการดังนี้

1. นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง การให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม และแบบวัดระดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele ที่ได้ผ่านการพิจารณาจากคณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ และผู้ทรงคุณวุฒิ ซึ่งได้รับการปรับปรุงแก้ไขแล้วมาทำการทดสอบก่อนเรียน กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนราชนันทาจารย์ สามเสนวิทยาลัย 2 ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2558 และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสุรศักดิ์มนตรี ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2559 ที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง โดยใช้เวลา 100 นาที

2. ดำเนินการสอนสาระการเรียนรู้ เรื่อง การให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ตามแผนการจัดการเรียนรู้ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นทั้งหมด 16 คาบ คาบละ 50 นาที โดยใช้ขั้นตอนการเรียนรู้ของ Van Hiele เฉพาะแผนการจัดการเรียนรู้ในคาบเรียนที่ 3 ถึง 12 เพื่อให้นักเรียนพัฒนาการตามระดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele อยู่ในระดับ 3 (การพิสูจน์อย่างมีแบบแผน) ซึ่งในแต่ละคาบผู้วิจัยได้บันทึกข้อมูลที่ได้จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ในแบบบันทึกหลังการจัดการเรียนรู้ เพื่อนำมาเป็นข้อมูลในการปรับปรุงแผนการจัดการเรียนรู้ที่นักเรียนจะเรียนรู้ต่อไปให้ดียิ่งขึ้น โดยสาระการเรียนรู้ของแผนการจัดการเรียนรู้เป็นดังนี้

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 คาบเรียนที่ 1 ประโยคเงื่อนไข และบทกลับของประโยคเงื่อนไข

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 คาบเรียนที่ 2 การให้เหตุผลทางเรขาคณิต

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 คาบเรียนที่ 3–4 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยม และการนำไปใช้

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 คาบเรียนที่ 5–6 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม (1)

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5 คาบเรียนที่ 7 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม (2)

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6 คาบเรียนที่ 8–9 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยม (1)

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7 คาบเรียนที่ 10 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยม (2)

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8 คาบเรียนที่ 11–12 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยม (3)

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9 คาบเรียนที่ 13 การสร้างรูปเรขาคณิตโดยใช้สันตรงและวงเวียน (1)

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10 คาบเรียนที่ 14 การสร้างรูปเรขาคณิตโดยใช้สันตรงและวงเวียน (2)

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11 คาบเรียนที่ 15–16 การสร้างรูปเรขาคณิตโดยใช้สันตรงและวงเวียน (3)

3. นำแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตไปให้นักเรียนทำในระหว่างที่มีการจัดการเรียนรู้ โดยแบ่งเป็น 4 ครั้ง คือ ครั้งที่ 1 นักเรียนทำแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ชุดที่ 1 จำนวน 2 ข้อ 8 คะแนน โดยครูนำไปใช้ในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 ใช้เวลา 20 นาที ครั้งที่ 2 นักเรียนทำแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ชุดที่ 2 จำนวน 2 ข้อ 12 คะแนน โดยครูนำไปใช้ในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6 ใช้เวลา 30 นาที ครั้งที่ 3 นักเรียนทำแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ชุดที่ 3 จำนวน 2 ข้อ 10 คะแนน โดยครูนำไปใช้ในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8 ใช้เวลา 30 นาที และครั้งที่ 4 นักเรียนทำแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ชุดที่ 4 จำนวน 2 ข้อ 10 คะแนน โดยครูนำไปใช้ในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11 ใช้เวลา 30 นาที

4. นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องการให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม และแบบวัดลำดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele ฉบับเดิมมาทำการทดสอบหลังเรียนกับกลุ่มตัวอย่าง โดยใช้เวลา 100 นาที

5. เขียนบันทึกหลังการจัดการเรียนรู้ ทุกคาบที่มีการจัดการเรียนรู้ เพื่อนำข้อมูลมาปรับปรุง และพัฒนาแผนการจัดการเรียนรู้ให้มีประสิทธิภาพ

ผลการวิจัย

ผลการนำรูปแบบการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตไปทดลองใช้ครั้งที่ 1

ผู้วิจัยได้นำรูปแบบการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตไปทดลองใช้ครั้งที่ 1 กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนราชนันทาจารย์ สามเสนวิทยาลัย 2 จำนวน 44 คน โดยผู้วิจัยขอนำเสนอผลการวิจัย 3 ด้าน คือ พัฒนาการในระดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องการให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม และความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตหลังการใช้รูปแบบการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ดังตารางที่ 1 ถึงตารางที่ 3 ตามลำดับดังนี้

จากตารางที่ 1 พบว่าก่อนเรียนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนราชนันทาจารย์ สามเสนวิทยาลัย 2 มีระดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele ในแต่ละระดับดังนี้ ขั้น 0 มากที่สุด คิดเป็นร้อยละ 52.27 รองลงมาคือขั้น 1 คิดเป็นร้อยละ 29.55 ขั้น 2 คิดเป็นร้อยละ 18.18 และไม่มีนักเรียนที่มีระดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele อยู่ในขั้น 3 แต่หลังจากนำรูปแบบการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่ผู้วิจัยได้พัฒนาไปใช้ ผลปรากฏว่า นักเรียนกลุ่มนี้มีระดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele อยู่ในขั้น 3 มากที่สุด คิดเป็นร้อยละ 63.64 รองลงมาคือขั้น 1 คิดเป็นร้อยละ 22.73 และขั้น 2 คิดเป็นร้อยละ 13.63 ตามลำดับ

ตารางที่ 1 การเปรียบเทียบระดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele ก่อนเรียนและหลังเรียน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนราชนันทาจารย์ สามเสนวิทยาลัย 2

		ระดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele			
		ขั้น 0	ขั้น 1	ขั้น 2	ขั้น 3
ก่อนเรียน	จำนวน (คน)	23	13	8	–
	ร้อยละ	52.27	29.55	18.18	–
หลังเรียน	จำนวน (คน)	–	10	6	28
	ร้อยละ	–	22.73	13.63	63.64

จากตารางที่ 2 พบว่าก่อนเรียนนักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องการให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม คิดเป็นคะแนนเฉลี่ย 15.09 คะแนน จากคะแนนเต็ม 50 คะแนน แต่หลังจากนำรูปแบบการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่ผู้วิจัยได้พัฒนาไปใช้ ผลปรากฏว่านักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ คิดเป็นคะแนนเฉลี่ย 31.98 คะแนน เพิ่มขึ้นจากเดิม 16.89 คะแนน หรือเพิ่มขึ้นร้อยละ 33.78

จากตารางที่ 3 พบว่า นักเรียนทำแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตโดยเรียงคะแนนจากมากที่สุดไปหาคะแนนน้อยที่สุด ได้ดังนี้ ชุดที่ 1 ได้คะแนนมากที่สุด คิดเป็นร้อยละ 84.13 แบบวัดชุดนี้ตรวจสอบความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ชุดที่ 4 ได้คะแนนคิดเป็นร้อยละ 67.50 แบบวัดชุดนี้ตรวจสอบการสร้างและการพิสูจน์ ชุดที่ 2 ได้คะแนนคิดเป็นร้อยละ 66.08 แบบวัดชุดนี้ตรวจสอบการพิสูจน์เกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยม และนักเรียนทำแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ชุดที่ 3 ได้คะแนนน้อยที่สุดคิดเป็นร้อยละ 60 แบบวัดชุดนี้ตรวจสอบการพิสูจน์เกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยม นอกจากนี้คะแนนรวมจากการทำแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต 4 ชุด (คะแนนเต็ม 40 คะแนน) คะแนนเฉลี่ย 27.41 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 68.53

ตารางที่ 2 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ก่อนเรียนและหลังเรียน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนราชนันทาจารย์ สามเสนวิทยาลัย 2

		ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์	การเปลี่ยนแปลง
ก่อนเรียน	คะแนนเฉลี่ย	15.09	–
	ร้อยละ	30.18	–
หลังเรียน	คะแนนเฉลี่ย	31.98	เพิ่มขึ้น 16.89
	ร้อยละ	63.96	เพิ่มขึ้น 33.78

ตารางที่ 3 คะแนนจากการทำแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต เป็นรายชุดของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนราชนันทาจารย์ สามเสนวิทยาลัย 2

	แบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต				
	ชุดที่ 1 (8 คะแนน)	ชุดที่ 2 (12 คะแนน)	ชุดที่ 3 (10 คะแนน)	ชุดที่ 4 (10 คะแนน)	รวม 4 ชุด (40 คะแนน)
คะแนนเฉลี่ย	6.73	7.93	6	6.75	27.41
ร้อยละ	84.13	66.08	60	67.50	68.53

ผลการนำรูปแบบการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตไปทดลองใช้ครั้งที่ 2

หลังจากผู้วิจัยได้ปรับปรุงรูปแบบการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตจากการทดลองใช้ครั้งที่ 1 ผู้วิจัยได้นำรูปแบบการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตไปทดลองใช้ครั้งที่ 2 กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสุรศักดิ์มนตรี จำนวน 2 ห้องเรียน ห้องเรียนละ 30 คน โดยผู้วิจัยขอนำเสนอผลการวิจัย 3 ด้าน คือ พัฒนาการในระดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องการให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม และความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต หลังการใช้รูปแบบการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ดังตารางที่ 4 – ตารางที่ 6 ตามลำดับดังนี้

จากตารางที่ 4 พบว่าก่อนเรียนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสุรศักดิ์มนตรี มีระดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele อยู่ในขั้น 2 มากที่สุด คิดเป็นร้อยละ 55.00 รองลงมาคือขั้น 1 คิดเป็นร้อยละ 36.67 และขั้น 0 คิดเป็นร้อยละ 8.33 และไม่มีนักเรียนที่มีระดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele อยู่ในขั้น 3 แต่หลังจากนำรูปแบบการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่ผู้วิจัยได้พัฒนาไปใช้ ผลปรากฏว่านักเรียนกลุ่มนี้มีระดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele อยู่ในขั้น 3 มากที่สุด คิดเป็นร้อยละ 68.33 รองลงมาคือขั้น 2 คิดเป็นร้อยละ 30.00 และขั้น 1 คิดเป็นร้อยละ 1.67 ตามลำดับ

ตารางที่ 4 การเปรียบเทียบระดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele ก่อนเรียนและหลังเรียน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสุรศักดิ์มนตรี

		ระดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele			
		ขั้น 0	ขั้น 1	ขั้น 2	ขั้น 3
ก่อนเรียน	จำนวน (คน)	5	22	33	–
	ร้อยละ	8.33	36.67	55	–
หลังเรียน	จำนวน (คน)	–	1	18	41
	ร้อยละ	–	1.67	30	68.33

จากตารางที่ 5 พบว่าก่อนเรียนนักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องการให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม คิดเป็นคะแนนเฉลี่ย 21.08 คะแนน จากคะแนนเต็ม 50 คะแนน แต่หลังจากนำรูปแบบการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่ผู้วิจัยได้พัฒนาไปใช้ ผลปรากฏว่านักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ คิดเป็นคะแนนเฉลี่ย 34.75 คะแนน เพิ่มขึ้นจากเดิม 13.67 คะแนน หรือเพิ่มขึ้นร้อยละ 27.34

จากตารางที่ 6 พบว่า นักเรียนทำแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตโดยเรียงคะแนนจากมากที่สุดไปหาคะแนนน้อยที่สุด ได้ดังนี้ ชุดที่ 2 ได้คะแนนมากที่สุดคิดเป็นร้อยละ 73.92 แบบวัดชุดนี้ตรวจสอบการพิสูจน์เกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยม รองลงมาชุดที่ 1 ได้คะแนนคิดเป็นร้อยละ 69.13 แบบวัดชุดนี้ตรวจสอบความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ชุดที่ 3 คิดเป็นร้อยละ 68.50 แบบวัดชุดนี้ตรวจสอบการพิสูจน์เกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยม และนักเรียนทำแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ชุดที่ 4 ได้คะแนนน้อยที่สุด คิดเป็นร้อยละ 61.30 แบบวัดชุดนี้ตรวจสอบการสร้างและการพิสูจน์ นอกจากนี้คะแนนรวมจากการทำแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต 4 ชุด (คะแนนเต็ม 40 คะแนน) คะแนนเฉลี่ย 27.47 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 68.68

ตารางที่ 5 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ก่อนเรียนและหลังเรียน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสุรศกดิ์มนตรี

		ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์	การเปลี่ยนแปลง
ก่อนเรียน	คะแนนเฉลี่ย	21.08	–
	ร้อยละ	42.16	–
หลังเรียน	คะแนนเฉลี่ย	34.75	เพิ่มขึ้น 13.67
	ร้อยละ	69.50	เพิ่มขึ้น 27.34

ตารางที่ 6 คะแนนจากการทำแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตเป็นรายชุดของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสุรศักดิ์มนตรี

	แบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต				
	ชุดที่ 1 (8 คะแนน)	ชุดที่ 2 (12 คะแนน)	ชุดที่ 3 (10 คะแนน)	ชุดที่ 4 (10 คะแนน)	รวม 4 ชุด (40 คะแนน)
คะแนนเฉลี่ย	5.53	8.87	6.85	6.13	27.47
ร้อยละ	69.13	73.92	68.50	61.30	68.68

สรุปผล และอภิปรายผล

รูปแบบการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ผู้วิจัยสร้างและพัฒนาขึ้น มีส่วนช่วยส่งเสริมพัฒนาการของนักเรียน ในระดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele ให้อยู่ในระดับ 3 หรือขั้นการพิสูจน์อย่างมีแบบแผน (Formal Deduction) ตลอดจนมีส่วนช่วยให้นักเรียนทุกคนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องการให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม หลังการเรียนสูงกว่าเกณฑ์ 60 เปอร์เซ็นต์ และความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนทุกคน หลังการใช้รูปแบบการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต สูงกว่าเกณฑ์ 60 เปอร์เซ็นต์ ทั้งนี้เป็นเพราะผู้วิจัยได้นำแผนภูมิสายงานวิเคราะห์ย้อนกลับมาใช้ในการเรียนการสอนการพิสูจน์ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ Linares (2008) ที่มีการนำวิธีการของ Solow คือ วิธีการเดินหน้า ถอยหลัง (Forward-Backward Method) ซึ่งวิธีการนี้เกี่ยวข้องกับการถามคำถามหลัก หรือกลยุทธ์ เพื่อไปให้ถึงข้อความที่ต้องการพิสูจน์ ซึ่งเทคนิคแผนผังการพิสูจน์ แสดงให้เห็นกระบวนการคิดของนักเรียน และเป็นแนวทางช่วยให้นักเรียนได้สำรวจความคิดเริ่มต้นทางคณิตศาสตร์ และสอดคล้องกับงานวิจัยของทัศนีย์ (2553) ซึ่งพบว่านักเรียนมีความพึงพอใจต่อกิจกรรมการเรียนเรขาคณิตเรื่องวงกลม โดยใช้การเขียนพิสูจน์แบบแผนผังแสดงเหตุผลอยู่ในระดับมาก นั่นแสดงให้เห็นว่าแผนภูมิสายงานวิเคราะห์ย้อนกลับมีส่วนช่วยให้นักเรียนประสบความสำเร็จในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต ซึ่งการเรียนการสอนการพิสูจน์นั้น ครูต้องใช้ทั้งศาสตร์และศิลป์ ทั้งนี้เพราะการพิสูจน์ต้องการทั้งความถูกต้อง ความสมเหตุสมผล และทักษะในการเรียบเรียงอย่างเป็นระบบอ่านแล้วทำความเข้าใจและติดตามได้ง่าย รวมทั้งการใช้ภาษาที่ตรงกับสิ่งที่ต้องการสื่อสาร มีความกระชับ และสละสลวย และสิ่งสำคัญที่สุดครูไม่ควรมุ่งเน้นแต่การสอนด้านความรู้เท่านั้นโดยละเลยหัวใจดวงน้อยของนักเรียน ครูควรมีคำชมเมื่อนักเรียนทำถูกต้องหรือมีการส่งงานครบถ้วนตรงตามเวลา หรือมีการให้รางวัลซึ่งเป็นการให้กำลังใจนักเรียนเป็นระยะ เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีการวางเงื่อนไขของ Skinner

ข้อเสนอแนะ

จากผลการวิจัยการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผู้วิจัยขอเสนอแนวทางสำหรับครูผู้สอนในการจัดการเรียนรู้ดังนี้

1. การพิสูจน์ทางเรขาคณิต ครูต้องให้นักเรียนเริ่มต้นวิเคราะห์จากสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ (ผล) ไปสู่สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ (เหตุ) และเขียนการพิสูจน์โดยเรียบเรียงจากเหตุไปสู่ผล

2. เทคนิคที่มีส่วนช่วยส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ของนักเรียน คือ แผนภูมิสายงานวิเคราะห์ย้อนกลับ ซึ่งใช้เป็นร่างแนวคิดในการพิสูจน์ และแผนผังความคิด ซึ่งทำให้นักเรียน เชื่อมโยงความรู้ทางเรขาคณิต

3. ควรมีการสร้างองค์ความรู้ใหม่จากประสบการณ์เดิมเกี่ยวกับสาระการเรียนรู้เรขาคณิต

4. ควรมีการเสริมแรง การให้รางวัลเพื่อเป็นขวัญกำลังใจและการฝึกซ้ำ

5. ความเข้าใจของครูเกี่ยวกับนักเรียนเป็นสิ่งสำคัญ การสอนด้วยหัวใจของครูจะเป็นแรงผลักดันอย่างมากต่อการเรียนรู้ของนักเรียน

6. ควรมีการกำกับติดตามการทำงานของนักเรียนและการให้ข้อมูลย้อนกลับอย่างสม่ำเสมอ

7. ควรมีการประเมินผลขณะเรียนรู้ (Assessment as Learning) การประเมินผลเพื่อเรียนรู้ (Assessment for Learning) และการประเมินผลการเรียนรู้ (Assessment of Learning)

ข้อเสนอแนะในการวิจัยครั้งต่อไป

1. ควรมีการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างระดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele กับความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต หลังการทดลองใช้รูปแบบการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

2. ควรมีการวิจัยเกี่ยวกับพฤติกรรม และรูปแบบการเรียน (Learning Style) ของนักเรียนที่มีผลต่อความสามารถในการพิสูจน์

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับการสนับสนุนจากสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)

เอกสารอ้างอิง

ทัศนีย์ มาลาพันธ์. (2553). *การศึกษาการจัดกิจกรรมการเรียนเรขาคณิตเรื่องวงกลมโดยการเขียนพิสูจน์แบบแผนผังแสดงเหตุผล สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนชำป่างามวิทยาคมจังหวัดฉะเชิงเทรา* (วิทยานิพนธ์ปริญญาโท). มหาวิทยาลัยราชภัฏพระนคร, กรุงเทพฯ.

ยุพิน พิพิธกุล. (2545). *การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ยุคปฏิรูปการศึกษา*. กรุงเทพฯ: บริษัท บพิธการพิมพ์ จำกัด.

สิริพร ทิพย์คง. (2532). แวนฮีลีโมเดล : ลำดับขั้นตอนการเรียนรู้เรขาคณิต. *วารสารศึกษาศาสตร์ปริทัศน์, 5*(3), 91–99.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2555ก). *ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์* (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพฯ: บริษัท 3-คิว มีเดีย จำกัด.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2555ข). *ครูคณิตศาสตร์มืออาชีพ เส้นทางสู่ความสำเร็จ*. กรุงเทพฯ: บริษัท 3-คิว มีเดีย จำกัด.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2557). *หนังสือเรียนรู้เพิ่มเติมเพื่อเสริมศักยภาพคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4–6. "ตรรกศาสตร์และการพิสูจน์"*. กรุงเทพฯ: บริษัทพัฒนาคุณภาพวิชาการ (พว.) จำกัด.

อัมพร ม้าคนอง. (2557). *คณิตศาสตร์สำหรับครูมัธยม*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

Bieda, K. N. (2010). Enacting proof-related tasks in middle school mathematics: Challenges and opportunities. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(4), 351–382.

Donna, R. (2012). *Styles of proof*. Retrieved from http://mathbitsnotebook.com/Geometry/BasicTerms/BTproofs.html

Golzy, J. (2008). *A cultural study of classroom discourse and its impact on students' initiation of geometry proofs* (Doctoral dissertation). Available from ProQuest Dissertation and Theses database. (UMI No. 3320455)

Lee, K. (2011). *Students' logical reasoning and mathematical proving of implications* (Doctoral dissertation). Available from ProQuest Dissertation and Theses database. (UMI No. 3454803)

Linares, L. A. (2008). *The process of making meaning: The interplay between teachers' knowledge of mathematical proofs and their classroom practices* (Unpublished master's thesis). University of California, Oakland.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Translated Thai References

Makanong, A. (2014). *Mathematics for mathayom teachers.* Bangkok, Thailand: Chulalongkorn University Press. [in Thai]

Malaphan, T. (2010). *A study of mathematical learning activities on circle using reasoning flow proof of mathayomsuksa 3 students at Champhangamwittayakom school in Chachoengsao province* (Unpublished master's thesis). Phranakhon Rajabhat University, Bangkok. [in Thai]

Pipithakul, Y. (2002). *Mathematics instructional in educational reform era.* Bangkok, Thailand: Bopit Printing Co., Ltd. [in Thai]

The Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology. (2012a). *Mathematical skill and process* (3rd ed.). Bangkok, Thailand: 3Q Media Co., Ltd. [in Thai]

The Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology. (2012b). *Professional mathematics teacher way to success.* Bangkok, Thailand: 3Q Media Co., Ltd. [in Thai]

The Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology. (2014). *Supplementary book for enhancing mathematical competency mathayomsuksa 4–6 "Logic and proof".* Bangkok, Thailand: Academic development Co., Ltd. [in Thai]

Thipkong, S. (1989). Van Hiele model: Geometric learning hierarchy. *Kasetsart Educational Review, 5*(3), 91–99. [in Thai]